BÁRBARA DENICOL DO AMARAL RODRIGUEZ
CINTHYA MARIA SCHNEIDER MENEGHETTI
CRISTIANA ANDRADE POFFAL

Integrais de Funções Reais

1ª Edição

Editora da furg

Rio Grande
Editora da FURG
2020

Universidade Federal do Rio Grande - FURG

NOTAS DE AULA DE CÁLCULO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E FÍSICA

Bárbara Rodriguez

Cinthya Meneghetti

Cristiana Poffal

Isbn:

Disponível em: https://lemas.furg.br/material-didatico

Sumário

Capítulo 1

Integral Indefinida

1.1 Breve Introdução

No cálculo diferencial estuda-se como calcular a derivada de uma função $f(x)$, dada por: $\frac{d}{dx}[f(x)] = f'(x)$, ou usando a diferencial $d(f(x)) = f'(x)dx$.

Os problemas de cálculo integral dependem da operação inversa do cálculo diferencial, ou seja:

*"Dada a diferencial $d\,(f(x)) = f'(x)dx$ de uma função $f(x)$, o problema se resume em encontrar tal função $f(x)$, a qual recebe o nome de **integral** ou **primitiva** da função."*

O processo utilizado para encontrar a função $f(x)$ é chamado de **integração** e é indicado pelo símbolo $\int$, posto antes da diferencial conhecida, logo:

$$\int f'(x)dx = f(x) + C,$$

onde C é uma constante arbitrária. Lê-se: a integral indefinida de $f'(x)dx$ é igual a $f(x)$ mais uma constante C.

Deste modo, pode-se dizer, de maneira informal, que derivação e a integração são operações inversas uma da outra. De fato: seja uma função $f(x)$, a derivada $f'(x)$ é única, embora existam infinitas integrais indefinidas para $f(x)$ que diferem apenas pela constante C.

Exemplo 1.1.1. Seja a função $f(x) = x^3$ e a sua derivada $f'(x) = 3x^2$, então $\displaystyle\int 3x^2dx = x^3 + C$.

1.2 Definições

Definição 1.2.1. Seja $I \subset \mathbb{R}$. Uma função $F : I \to \mathbb{R}$ é chamada de primitiva ou integral da função $f : I \to \mathbb{R}$ se, para todo $x \in I$, tem-se $F'(x) = f(x)$.

Exemplo 1.2.1. A função $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ é primitiva da função $f(x) = x^2$.

Solução:

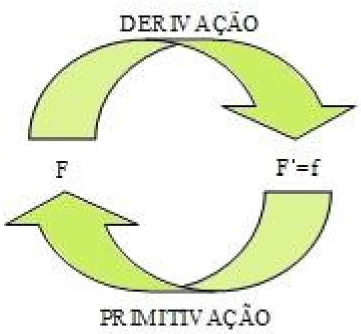
Note que se $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$, então $F'(x) = \dfrac{3x^2}{3} = x^2 = f(x)$.

Analogamente, se $\displaystyle\int f(x)dx = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$, então

$$\frac{d}{dx}(F(x)) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3} + C\right) = \frac{3x^2}{3} = x^2.$$

Em outras palavras, "o processo de integrar reduz-se a descobrir uma função conhecendo sua derivada" (Figura 1.1).

Figura 1.1: Processos de derivação e integração



Definição 1.2.2. Seja $I \subset \mathbb{R}$. Se $F : I \to \mathbb{R}$ é uma função primitiva da função $f : I \to \mathbb{R}$, então $F(x) + C$ é chamada de **integral indefinida** da função f, sendo representada por:

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

onde:

x é a variável de integração;

$f(x)$ é a função integrando;

$\int$ é o símbolo de integração;

$F(x)$ é a função primitiva;

C é uma constante de integração.

Exemplo 1.2.2. Considere a função $f(x) = 2x$.

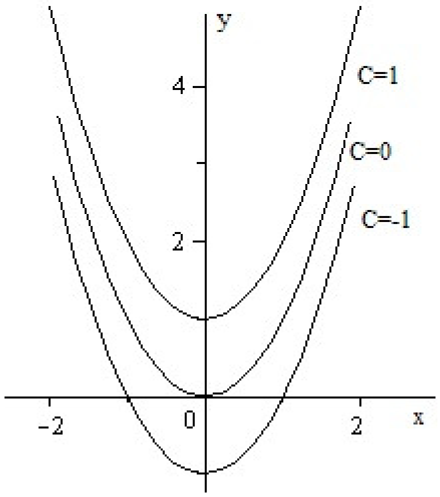
a) Se $F(x) = x^2$, então $F'(x) = 2x = f(x)$.

b) Se $F(x) = x^2 + 1$, então $F'(x) = 2x = f(x)$.

c) Se $F(x) = x^2 - 1$, então $F'(x) = 2x = f(x)$.

A Figura 1.2 apresenta a família de curvas $F(x) = x^2 + C$, para $C = -1, C = 0$ e $C = 1$.

Figura 1.2: Família de curvas



Portanto, pode-se concluir que:

"A integral indefinida de uma função, quando existe, representa, geometricamente, uma família de curvas planas congruentes que, duas a duas, podem ser superpostas através de translações convenientes realizadas na direção do eixo y."

Exemplo 1.2.3. Seja $f(x) = \cos(x)$.

a) Se $\dfrac{d}{dx}[\operatorname{sen}(x)] = \cos(x)$, então $\operatorname{sen}(x)$ é uma função primitiva de $\cos(x)$.

b) Se $\dfrac{d}{dx}[\operatorname{sen}(x) + 3] = \cos(x)$, então $\operatorname{sen}(x) + 3$ é uma função primitiva de $\cos(x)$.

c) Se $\dfrac{d}{dx}[\operatorname{sen}(x) - 8] = \cos(x)$, então $\operatorname{sen}(x) - 8$ é uma função primitiva de $\cos(x)$.

E assim sucessivamente ....

Portanto, se $\dfrac{d}{dx}[\operatorname{sen}(x) + C] = \cos(x)$, então $\operatorname{sen}(x) + C$ é uma primitiva de $\cos(x)$, sendo C uma constante.

Uma função pode apresentar mais de uma primitiva as quais diferem por uma constante. No exemplo 1.2.3, tem-se a primitiva geral da função $\cos(x)$ igual a $\text{sen}(x) + C$, ou seja,

$$\int \cos(x)dx = \text{sen}(x) + C.$$

Exemplo 1.2.4. As funções $\frac{1}{3}x^3$, $\frac{1}{3}x^3 + 2$, $\frac{1}{3}x^3 - 5$, $\frac{1}{3}x^3 + \sqrt{2}$ são primitivas da função $f(x) = x^2$, pois:

a) $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^3\right) = x^2$;

b) $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^3 + 2\right) = x^2$;

c) $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^3 - 5\right) = x^2$;

d) $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^3 + \sqrt{2}\right) = x^2$.

Observação 1.2.1. Para verificar se uma função primitiva $f(x)$ foi calculada corretamente, determina-se a derivada da solução $F(x) + C$. Se essa derivada for igual a função $f(x)$, então a primitiva está correta, mas se for diferente, então existe algum erro nos cálculos.

Exemplo 1.2.5. Se $f(x) = y$, então $\int y dx = yx + C$ é uma primitiva de $f(x) = y$, pois em relação a variável de integração x, tem-se que y é constante.

1.3 Propriedades da Integração Indefinida

Sejam $I \subset \mathbb{R}$, as funções f, g: $I \to \mathbb{R}$ e K uma constante, então:

i) A integral do produto de uma constante K por uma função $f(x)$ é igual ao produto da constante K pela integral da função, ou seja:

$$\int K f(x)dx = K \int f(x)dx.$$

ii) A integral da soma algébrica de funções é igual a soma algébrica das integrais indefinidas de cada função, ou seja:

$$\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

iii) A diferencial da integração de uma função é igual ao elemento de integração:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

iv) A derivada da integral indefinida de uma função é igual a função integrando:

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right) = f(x).$$

Atenção! Não existe uma regra para a integral do produto e/ou do quociente de duas funções.

1.4 Integral da Potência de x

A integral de uma potência de x é uma outra potência de x obtida do integrando aumentando-se seu expoente em uma unidade e dividindo-se a expressão resultante pelo novo expoente, ou seja:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1.$$

De fato, verifica-se que a derivada da expressão resultante é igual a x^n:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right) = (n+1)\frac{x^{n+1-1}}{n+1} = x^n.$$

Observação 1.4.1. Tem-se que

$$\int dx = x + C,$$

pois neste caso $f(x) = 1$, ou ainda, $f(x) = x^0$, logo

$$\int x^0 dx = \frac{x^{0+1}}{0+1} + C = x + C.$$

Exemplo 1.4.1. Calcule as integrais:

a) $I_a = \displaystyle\int (x^3 + 5x^7)dx.$

Solução:

Utilizando-se as propriedades da integração indefinida i) e ii) pode-se escrever I_a como:

$$I_a = \int x^3 dx + 5\int x^7 dx.$$

Após, utilizando-se a integral da potência de x, obtém-se:

$$\begin{aligned} I_a &= \frac{x^{3+1}}{3+1} + \frac{5x^{7+1}}{7+1} + C \\ I_a &= \frac{x^4}{4} + \frac{5x^8}{8} + C. \end{aligned}$$

b) $I_b = \displaystyle\int \left(\frac{1}{x^3} + \frac{6}{x\sqrt{x}} + 3\right) dx.$

Solução:

Para resolução da integral I_b seguem-se os mesmos passos utilizados na letra a) deste exemplo, logo:

$$\begin{aligned} I_b &= \int \frac{1}{x^3}dx + \int \frac{6}{x\sqrt{x}}dx + \int 3dx \quad \text{(Propriedade ii)} \\ &= \int \frac{1}{x^3}dx + 6\int \frac{1}{x\sqrt{x}}dx + 3\int dx \quad \text{(Propriedade i)} \\ &= \int x^{-3}dx + 6\int x^{-\frac{3}{2}}dx + 3\int dx \quad \text{(Propriedades da potenciação)} \\ &= \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + \frac{6x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + \frac{3x^{0+1}}{0+1} + C \quad \text{(Integral da Potência de } x\text{)} \\ &= \frac{x^{-2}}{-2} + \frac{6x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + 3x + C \\ I_b &= -\frac{1}{2x^2} - \frac{12}{\sqrt{x}} + 3x + C. \quad \text{(Simplificação dos termos)} \end{aligned}$$

c) $I_c = \displaystyle\int \left(\frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}\right) dx.$

Solução: Para resolver a integral I_c utilizam-se a Propriedade ii) e a manipulação dos expoentes. Assim,

$$\begin{aligned}
I_c &= \int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}dx + \int \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}dx \quad \text{(Propriedade ii)}\\
&= \int \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}}dx + \int \frac{x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}}dx \quad \text{(Propriedades da potenciação)}\\
&= \int x^{\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)}dx + \int x^{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)}dx\\
&= \int x^{\frac{1}{6}}dx + \int x^{-\frac{1}{4}}dx\\
&= \frac{x^{\frac{1}{6}+1}}{\frac{1}{6}+1} + \frac{x^{-\frac{1}{4}+1}}{-\frac{1}{4}+1} + C \quad \text{(Integral da Potência de } x\text{)}\\
I_c &= \frac{6x^{\frac{7}{6}}}{7} + \frac{4x^{\frac{3}{4}}}{3} + C.
\end{aligned}$$

1.5 Método da Substituição

Pelas Propriedades da Integração Indefinida sabe-se que a integral da soma ou da diferença é a soma ou a diferença das integrais. Entretanto, não há regra específica para se calcular integrais de produtos ou quocientes. Isso ocorre porque a tarefa de se determinar o valor de tais integrais deriva da regra da cadeia através de uma técnica chamada de Método da Substituição.

Sejam F uma função primitiva de f num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e g uma função derivável, tal que a função composta da F com a g, isto é, $F \circ g = F(g(x))$, esteja definida. Aplicando a regra da cadeia tem-se,

$$[F(g(x))]' = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x).$$

Logo, $F(g(x))$ é uma primitiva de $f(g(x))g'(x)$, então:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C,$$

fazendo $u = g(x)$, tem-se $du = g'(x)dx$ e substituindo-se na expressão anterior:

$$\boxed{\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + C.}$$

Esse método basicamente consiste em transformar uma integral complicada em outra mais simples da qual se conhece o resultado, através de uma substituição ou mudança de variável. O ponto essencial a ser lembrado quando utiliza-se este método é que a substituição $u = g(x)$ implica que $du = g'(x)dx$.

Observe o caso particular para a integral de uma função potência.

A fórmula $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$, parece ser uma variação da integral da potência de x na qual a variável x é substituída pela função u. No entanto, quando u é alguma função de x, então du é a diferencial dessa função, isto é, se $u = g(x)$ então $du = g'(x)dx$. Logo, o método de integração por substituição pode ser representado por:

$$\int [g(x)]^n g'(x)dx = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1.$$

Deste modo, pode-se escrever a integral de uma função potência da seguinte forma:

$$\boxed{\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1.}$$

Exemplo 1.5.1. Calcule a integral: $I_1 = \int (9x^2 - 1)^{\frac{1}{3}} x dx$.

Solução:

A integral I_1 pode ser resolvida utilizando-se o método da substituição, aplicando-se a mudança de variável:

$$u = 9x^2 - 1.$$

Portanto, tem-se $du = 18xdx$ e $xdx = \frac{du}{18}$. Substituindo-se na integral I_1, obtém-se uma nova integral na variável u, ou seja:

$$I_n = \int u^{\frac{1}{3}} \frac{du}{18} = \frac{1}{18} \int u^{\frac{1}{3}} du.$$

Pela integral da potência de x, obtém-se o resultado para a integral I_n, como segue:

$$\begin{aligned} I_n &= \left(\frac{1}{18}\right) \frac{u^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C \\ &= \left(\frac{1}{18}\right) \frac{u^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C \\ &= \frac{1}{24} u^{\frac{4}{3}} + C. \end{aligned}$$

Como, inicialmente, considerou-se $u = 9x^2 - 1$, retorna-se para a variável original x, substituindo-se u em I_n para se obter o resultado da integral I_1. Logo,

$$I_1 = \frac{1}{24}(9x^2 - 1)^{\frac{4}{3}} + C.$$

Exemplo 1.5.2. Calcule as integrais:

a) $I_a = \int \sqrt[3]{2x+1}\,dx$ b) $I_b = \int \dfrac{\cos(3x)}{\sqrt{\operatorname{sen}(3x)+2}}dx$ c) $I_c = \int \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2(x)}}dx$

d) $I_d = \int \dfrac{\ln^2(x)}{x}dx$ e) $I_e = \int \dfrac{3x}{(a+bx^2)^3}dx$, onde $a, b \neq 0$ f) $I_f = \int \operatorname{sen}^2(x)\cos(x)dx$

g) $I_g = \int \left(\dfrac{\sec(3x)}{1+\operatorname{tg}(3x)}\right)^2 dx$ h) $I_h = \int \dfrac{2+\ln(x)}{x}dx$

Solução:

a) $I_a = \int \sqrt[3]{2x+1}\,dx.$

Resolve-se a integral I_a utilizando-se o método da substituição, fazendo-se a mudança de variável:

$$u = 2x+1.$$

Desse modo, $du = 2dx$ e $dx = \dfrac{du}{2}$. Substituem-se tais expressões na integral I_a e obtém-se uma nova integral na variável u, ou seja:

$$\begin{aligned} I_n = \int \sqrt[3]{u}\,\frac{du}{2} &= \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{3}}du \quad \text{(Propriedade i)} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)\frac{u^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C \quad \text{(Integral da Potência)} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)\frac{u^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C \\ &= \frac{3}{8}u^{\frac{4}{3}} + C. \end{aligned}$$

Como $u = 2x+1$, retorna-se para a variável original x, substituindo-se u em I_n para se obter o resultado da integral I_a. Logo:

$$I_a = \frac{3}{8}(2x+1)^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{8}\sqrt[3]{(2x+1)^4} + C.$$

b) $I_b = \int \dfrac{\cos(3x)}{\sqrt{\operatorname{sen}(3x)+2}}dx.$

Pode-se utilizar o método da substituição para resolver a integral I_b fazendo-se a mudança de variável:

$$u = \operatorname{sen}(3x)+2.$$

Assim, tem-se $du = 3\cos(3x)dx$ e $\cos(3x)dx = \dfrac{du}{3}$. Substituindo-se tais expressões na integral I_b, se obtém uma nova integral na variável u, ou seja:

$$\begin{aligned} I_n = \int \frac{1}{\sqrt{u}}\frac{du}{3} &= \frac{1}{3}\int u^{-\frac{1}{2}}du \quad \text{(Propriedade i)} \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C \quad \text{(Integral da Potência)} \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C \\ &= \frac{2}{3}u^{\frac{1}{2}} + C \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{u} + C. \end{aligned}$$

Sendo $u = \text{sen}(3x)+2$, retorna-se para a variável original x substituindo-se u em I_n para obter o resultado da integral I_b. Logo:

$$I_b = \frac{2}{3}\sqrt{\text{sen}(3x)+2} + C.$$

c) $I_c = \displaystyle\int \frac{\text{sen}(2x)}{\sqrt{1+\text{sen}^2(x)}}dx.$

Aplicando o método da substituição, resolve-se a integral I_c aplicando-se a mudança de variável a seguir:

$$u = 1 + \text{sen}^2(x).$$

Portanto, $du = 2\text{sen}(x)\cos(x)dx = \text{sen}(2x)dx$ (Relações trigonométricas). Substituem-se tais expressões na integral I_c e obtém-se a nova integral na variável u:

$$\begin{aligned} I_n = \int \frac{du}{\sqrt{u}}du &= \int u^{-\frac{1}{2}}du \\ &= \frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C \quad \text{(Integral da Potência)} \\ &= 2u^{\frac{1}{2}} + C \\ &= 2\sqrt{u} + C. \end{aligned}$$

Como se considerou inicialmente $u = 1 + \text{sen}^2(x)$, retorna-se para a variável original x substituindo-se u em I_n para se obter o resultado da integral I_c.

Logo:

$$I_c = 2\sqrt{1+\operatorname{sen}^2(x)} + C.$$

d) $I_d = \displaystyle\int \frac{\ln^2(x)}{x}dx.$

Pelo método da substituição, resolve-se a integral I_d fazendo-se a mudança de variável:

$$u = \ln(x).$$

Portanto, $du = \dfrac{1}{x}dx$. Substituindo-se tais expressões na integral I_f têm-se uma nova integral na variável u, ou seja:

$$\begin{aligned} I_n = \int u^2 du &= \frac{u^{2+1}}{2+1} + C \quad \text{(Integral da Potência)} \\ &= \frac{u^3}{3} + C. \end{aligned}$$

Sendo $u = \ln(x)$, retorna-se para a variável original x, substituindo-se u em I_n para se obter o resultado da integral I_d. Logo:

$$I_d = \frac{\ln^3(x)}{3} + C.$$

e) $I_e = \displaystyle\int \frac{3x}{(a+bx^2)^3}dx, a \neq 0, b \neq 0.$

Utiliza-se o método da substituição para se resolver a integral I_e com a seguinte mudança de variável:

$$u = a + bx^2.$$

Consequentemente, $du = 2bxdx$ e $xdx = \dfrac{du}{2b}$, onde $b \neq 0$. Substituem-se tais expressões na integral I_e e obtém-se uma nova integral na variável u, ou seja:

$$\begin{aligned} I_n = \int \frac{3}{u^3}\frac{du}{2b} &= \frac{3}{2b}\int u^{-3}du \quad \text{(Propriedade i)} \\ &= \left(\frac{3}{2b}\right)\frac{u^{-3+1}}{-3+1} + C \quad \text{(Integral da Potência)} \\ &= \left(\frac{3}{2b}\right)\frac{u^{-2}}{-2} + C \\ &= -\frac{3}{4bu^2} + C. \end{aligned}$$

Como se considerou inicialmente $u = a + bx^2$, retorna-se para a variável original x substituindo-se u em I_n para se obter o resultado da integral I_e, ou seja:

$$I_e = -\frac{3}{4b(a+bx^2)^2} + C.$$

f) $I_f = \int \operatorname{sen}^2(x)\cos(x)dx.$

Resolve-se a integral I_f pelo método da substituição, fazendo-se a mudança de variável:

$$u = \operatorname{sen}(x).$$

Portanto, $du = \cos(x)dx$. Substituem-se tais expressões na integral I_f e obtém-se uma nova integral na variável u, ou seja:

$$\begin{aligned} I_n = \int u^2 du &= \frac{u^{2+1}}{2+1} + C \quad \text{(Regra da Potência)} \\ &= \frac{u^3}{3} + C. \end{aligned}$$

Como se considerou $u = \operatorname{sen}(x)$, retorna-se para a variável original x, substituindo-se u em I_n e obtém-se o resultado da integral I_f, como segue:

$$I_f = \frac{\operatorname{sen}^3(x)}{3} + C.$$

g) $I_g = \int \left(\frac{\sec(3x)}{1+\operatorname{tg}(3x)}\right)^2 dx.$

A integral pode ser reescrita como

$$I_g = \int \frac{\sec^2(3x)}{[1+\operatorname{tg}(3x)]^2} dx.$$

Utilizando-se o método da substituição, resolve-se a integral I_g com a mudança de variável:

$$u = 1 + \operatorname{tg}(3x).$$

Logo, $du = 3\sec^2(3x)dx$ e $\frac{du}{3} = \sec^2(3x)$. Após a substituição dessas expressões na integral I_g, obtém-se a nova integral na variável u:

$$\begin{aligned} I_n = \int \frac{1}{u^2}\frac{du}{3} &= \frac{1}{3}\int u^{-2} du \quad \text{(Propriedade i)} \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)\frac{u^{-2+1}}{-2+1} + C \quad \text{(Integral da Potência)} \\ &= -\frac{1}{3}u^{-1} + C \\ &= -\frac{1}{3u} + C. \end{aligned}$$

Como $u = 1 + \text{tg}(3x)$, retorna-se para a variável original x, substituindo-se u em I_n e obtém-se o resultado da integral I_g, como segue:

$$I_g = -\frac{1}{3[1 + \text{tg}(3x)]} + C.$$

h) $I_h = \displaystyle\int \frac{2 + \ln(x)}{x} dx$.

Pelo método da substituição, resolve-se a integral I_h com a seguinte mudança de variável:

$$u = 2 + \ln(x).$$

Como consequência, $du = \dfrac{1}{x}dx$. Substituindo-se na integral I_h tem-se uma nova integral na variável u, ou seja:

$$\begin{aligned} I_n = \int u du &= \frac{u^{1+1}}{1+1} + C \quad \text{(Integral da Potência)} \\ &= \frac{u^2}{2} + C. \end{aligned}$$

Como $u = 2 + \ln(x)$, então retorna-se para a variável original x, substituindo-se u em I_n para se obter o resultado da integral I_h. Portanto,

$$I_h = \frac{(2 + \ln(x))^2}{2} + C.$$

Pode-se observar na resolução das questões no Exemplo 1.5.2 que não é possível, obter uma regra geral para determinar quais as substituições que devem ser feitas, isto é, de como escolher a função u.

O sucesso do método depende de se ter uma integral em que uma parte do integrando seja a derivada de uma outra parte, a menos de um fator constante (fatores constantes podem ser "ajustados", como pode ser observado na solução dos exemplos).

1.5.1 Exercício: Método da Substituição

Exercício 1.5.1. Calcule as integrais:

a) $I_a = \int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$ b) $I_b = \int (5x+2)^4 dx$ c) $I_c = \int \left(\sqrt{x^2+x^4}\right) dx$

d) $I_d = \int x^2(x^2-1)dx$ e) $I_e = \int \frac{1}{(2x-3)^2}dx$ f) $I_f = \int \frac{x}{\sqrt{5-4x^2}}dx$

g) $I_g = \int x^2(1-4x^3)^{\frac{1}{3}}dx$ h) $I_h = \int x^{\frac{2}{3}}\left(2 - x^{\frac{5}{3}}\right)^{-5} dx$ i) $I_i = \int \frac{(1+\sqrt{x})^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{x}}dx$

j) $I_j = \int \frac{2+3x}{\sqrt{1+4x+3x^2}}dx$ k) $I_k = \int \frac{\text{arcsen}(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

Respostas do Exercício

a) $I_a = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{x} + C$ b) $I_b = \frac{1}{25}(5x+2)^5 + C$ c) $I_c = \frac{1}{3}\sqrt{(1+x^2)^3} + C$

d) $I_d = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + C$ e) $I_e = -\frac{(2x-3)^{-1}}{2} + C$ f) $I_f = -\frac{\sqrt{5-4x^2}}{4} + C$

g) $I_g = -\frac{1}{16}\left(1-4x^3\right)^{\frac{4}{3}} + C$ h) $I_h = \frac{3}{20}\left(2 - x^{\frac{5}{3}}\right)^{-4} + C$ i) $I_i = \frac{8}{5}\left(1+\sqrt{x}\right)^{\frac{5}{4}} + C$

j) $I_j = \sqrt{1+4x+3x^2} + C$ k) $I_k = \frac{\text{arcsen}^2(x)}{2} + C.$

1.6 Regras de Integração

Nesta seção estudam-se algumas regras de integração aplicadas com frequência no cálculo integral. Para tal, considera-se $u = g(x)$.

1.6.1 Integral da Potência

A primeira regra estudada foi a que trata da integral de uma função potência. Considere a função potência $f(u) = u^n$, a integral de $f(u)$ é uma outra função potência obtida do integrando aumentando-se seu expoente de 1 e dividindo-se a expressão resultante pelo novo expoente $n+1$, ou seja:

$$\boxed{\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1.}$$

Atenção! Observe que esta regra só vale para $n \neq -1$.

1.6.2 Integral de $f(u) = e^u$

Seja a função exponencial de base e, $f(u) = e^u$ e sabendo-se que a sua derivada é $f'(u) = e^u$, têm-se que a integral da função $f(u)$ é:

$$\boxed{\int e^u du = e^u + C.}$$

Exemplo 1.6.1. Calcule as integrais:

a) $I_a = \displaystyle\int e^{x^2+3x}(4x+6)\,dx$ b) $I_b = \displaystyle\int xe^{-x^2}\,dx$

c) $I_c = \displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ d) $I_d = \displaystyle\int \frac{e^{\operatorname{arctg}(x)}}{1+x^2}\,dx$

Solução:

a) $I_a = \displaystyle\int e^{x^2+3x}(4x+6)\,dx.$

Observe que $\displaystyle\int e^{x^2+3x}(4x+6)\,dx = 2\int e^{x^2+3x}(2x+3)\,dx.$

Como consequência, fazendo $u = x^2+3x$, tem-se $du = (2x+3)dx$. Logo, obtém-se uma nova integral I_n na variável u:

$$\begin{aligned} I_n &= 2\int e^u\,du \\ &= 2e^u + C. \end{aligned}$$

Como considerou-se inicialmente $u = x^2+3x$, retorna-se para a variável original x substituindo-se u em I_n para se obter o resultado da integral I_a:

$$I_a = 2e^{x^2+3x} + C.$$

b) $I_b = \displaystyle\int xe^{-x^2}dx.$

Sabe-se que $\displaystyle\int e^u du = e^u + C$. Resolve-se a integral I_b utilizando-se o método da substituição com a mudança de variável:

$$u = -x^2.$$

Assim, tem-se que $du = -2xdx$ e $xdx = -\dfrac{du}{2}$. Substituindo-se tais expressões na integral I_b, obtém-se uma nova integral na variável u:

$$\begin{aligned} I_n = \int e^u\left(-\frac{du}{2}\right) &= -\frac{1}{2}\int e^u du \quad \text{(Propriedade i)} \\ &= -\frac{1}{2}e^u + C. \quad \text{(Integral imediata 1.6.2)} \end{aligned}$$

Como $u = -x^2$, retorna-se para a variável original x pela substituição de u em I_n e obtém-se:

$$I_b = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C.$$

c) $I_c = \displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx.$

Como $\displaystyle\int e^u du = e^u + C$, pode-se resolver a integral I_c pelo método da substituição, ou seja, fazendo-se a mudança de variável:

$$u = \sqrt{x}.$$

Consequentemente $du = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx,\ du = \dfrac{1}{2}\dfrac{dx}{\sqrt{x}}$ e $\dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2du$. Substituindo-se na integral I_c, obtém-se a nova integral na variável u:

$$\begin{aligned} I_n = \int 2e^u du &= 2\int e^u du \quad \text{(Propriedade i)} \\ &= 2e^u + C. \quad \text{(Integral imediata 1.6.2)} \end{aligned}$$

Como considerou-se inicialmente $u = \sqrt{x}$, retorna-se para a variável original x, substituindo-se u em I_n para obter:

$$I_c = 2e^{\sqrt{x}} + C.$$

d) $I_d = \displaystyle\int \frac{e^{\text{arctg}(x)}}{1+x^2}dx.$

Sabendo-se que $\displaystyle\int e^u du = e^u + C$, utiliza-se o método da substituição para resolver a integral I_d, com a seguinte mudança de variável:

$$u = \text{arctg}(x).$$

Portanto, $du = \dfrac{1}{1+x^2}dx$. Logo, substituem-se tais expressões na integral I_d e obtém-se a nova integral I_n na variável u:

$$I_n = \int e^u du = e^u + C. \quad \text{(Integral imediata 1.6.2)}$$

Como considerou-se inicialmente $u = \text{arctg}(x)$, retorna-se para a variável original x, substituindo u em I_n para obter-se o resultado da integral:

$$I_d = e^{\text{arctg}(x)} + C.$$

Exemplo 1.6.2. Resolva a integral $I = \displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x - 5}}\,dx$.

Solução:
$I = \displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x - 5}}dx.$

Pela regra de integração $\displaystyle\int e^u du = e^u + C$, não é possível resolver a integral I. Entretanto, utilizando-se o método da substituição, ou seja, fazendo-se a mudança de variável:

$$u = e^x - 5.$$

Como consequência, $du = e^x dx$. Logo, obtém-se uma nova integral I_n na variável u:

$$\begin{aligned} I_n = \int \frac{du}{\sqrt{u}} &= \int u^{-\frac{1}{2}} du \\ &= \frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C \quad \text{(Integral da Potência)} \\ &= 2u^{\frac{1}{2}} + C. \end{aligned}$$

Como considerou-se inicialmente $u = e^x - 5$, retorna-se para a variável original x substituindo-se u em I_n para se obter o resultado da integral I_a:

$$I = 2\sqrt{e^x - 5} + C.$$

1.6.3 Integral de $f(u) = \dfrac{1}{u}$

Sabendo-se que dada uma função $f(u) = \ln(u)$, e que sua derivada corresponde a $f'(u) = \dfrac{1}{u}$, então, pelo processo inverso da diferenciação, obtém-se:

$$\boxed{\int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C, u > 0.}$$

Exemplo 1.6.3. Calcule as seguintes integrais:

a) $I_a = \displaystyle\int \frac{1}{4x}dx$ b) $I_b = \displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^{2x} - 4}dx$ c) $I_c = \displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2(x)[3\text{tg}(x) + 1]}$

Solução:

a) $I_a = \int \frac{1}{4x} dx.$

Sabendo-se que $\int \frac{1}{u}\, du = \ln|u| + C, u > 0$, pela Propriedade i tem-se:

$$I_a = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x} dx. \quad \text{(Integral Imediata 1.6.3)}$$

Portanto, $I_a = \frac{1}{4}\ln|x| + C.$

b) $I_b = \int \frac{e^{2x}}{e^{2x} - 4} dx.$

Sabendo-se que $\int e^u du = e^u + C$, utiliza-se o método da substituição para resolver a integral I_b, com a seguinte mudança de variável:

$$u = e^{2x} - 4.$$

Portanto, $du = 2e^{2x}dx$. Logo, substituem-se tais expressões na integral I_b e obtém-se a nova integral I_n na variável u, como segue:

$$\begin{aligned} I_n = \int \frac{1}{u}\frac{1}{2} du &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u} du \quad \text{(Propriedade i)} \\ &= \frac{1}{2}\ln|u| + C. \quad \text{(Integral Imediata 1.6.3)} \end{aligned}$$

Como considerou-se inicialmente $u = e^{2x} - 4$, retorna-se para a variável original x, substituindo u em I_n para se obter o resultado da integral:

$$I_b = \frac{1}{2}\ln|e^{2x} - 4| + C.$$

c) $I_c = \int \frac{dx}{\cos^2(x)(3\text{tg}(x) + 1)}.$

Fazendo-se primeiramente a mudança de variável pelo método da substituição, tem-se:

$$u = 3\text{tg}(x) + 1 \quad \text{e} \quad du = \frac{3}{\cos^2(x)} dx.$$

Assim tem-se uma nova integral I_n na variável u:

$$\begin{aligned} I_n = \int \frac{1}{u}\frac{du}{3} &= \frac{1}{3}\int \frac{du}{u} \quad \text{(Propriedade i)} \\ &= \frac{1}{3}\ln|u| + C, u > 0. \quad \text{(Integral Imediata 1.6.3)} \end{aligned}$$

Voltando a variável original tem-se:

$$I_c = \frac{1}{3}\ln|3\text{tg}(x) + 1| + C.$$

1.6.4 Integral de $f(u) = a^u$

Considere uma função $f(u) = a^u$, e sabendo-se que a sua derivada é igual a $f'(u) = a^u \ln(a)$, então obtém-se que:

$$\boxed{\int a^u du = \frac{a^u}{\ln(a)} + C.}$$

Exemplo 1.6.4. Calcule as integrais:

a) $I_a = \int x^2 2^{2x^3} dx$ b) $I_b = \int 6^{2x} \ln(6) dx$ c) $I_c = \int (3x+1)3^{(3x^2+2x)} dx$

Solução:

a) $I_a = \int x^2 2^{2x^3} dx.$

Sabendo-se que $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln(a)} + C$, logo, utiliza-se o método da substituição para resolver a integral I_a, fazendo-se a mudança de variável:

$$u = 2x^3 \quad \text{e portanto tem-se} \quad du = 6x^2 dx.$$

Deste modo, obtém-se uma nova integral I_n na variável u:

$$\begin{aligned} I_n = \int 2^u \frac{du}{6} &= \frac{1}{6} \int 2^u du \quad \text{(Propriedade i)} \\ &= \frac{1}{6} \frac{2^u}{\ln(2)} + C. \quad \text{(Integral Imediata 1.6.4)} \end{aligned}$$

Retorna-se a variável inicial em I_a e obtém-se:

$$I_a = \frac{2^{2x^3}}{6\ln(2)} + C.$$

b) $I_b = \int 6^{2x} \ln(6) dx.$

Fazendo-se a mudança de variável pelo método da substituição, obtém-se:

$$u = 2x \quad \text{e} \quad du = 2dx.$$

Substitui-se na integral I_b e obtém-se uma nova integral I_n na variável u:

$$\begin{aligned} I_n = \int 6^u \ln(6) \frac{du}{2} &= \frac{ln(6)}{2} \int 6^u du \quad \text{(Propriedade } i) \\ &= \frac{\ln(6)}{2} \frac{6^u}{\ln(6)} + C = \frac{6^u}{2} + C. \quad \text{(Integral Imediata 1.6.4)} \end{aligned}$$

Retornando-se a variável inicial em I_b, obtém-se o seguinte resultado:

$$I_b = \frac{6^{2x}}{2} + C.$$

c) $I_c = \displaystyle\int (3x+1)3^{(3x^2+2x)}dx.$

Utilizando o método de substituição, faz-se a seguinte mudança de variável:

$$u = 3x^2 + 2x \quad \text{logo,} \quad du = (6x+2)dx \quad \text{ou ainda,} \quad du = 2(3x+1)dx.$$

Tem-se assim uma nova integral na variável u:

$$\begin{aligned} I_n = \int \frac{3^u}{2}du &= \frac{1}{2}\int 3^u du \quad \text{(Propriedade i)} \\ &= \frac{3^u}{2\ln(3)} + C. \quad \text{(Integral Imediata 1.6.4)} \end{aligned}$$

Retorna-se a variável x:

$$I_c = \frac{3^{(3x^2+2x)}}{2\ln(3)} + C.$$

1.6.5 Exercício: Regras de Integração - Parte I

Exercício 1.6.1. Mostre que:

a) $\displaystyle\int \operatorname{senh}(x)dx = \cosh(x) + C.$

b) $\displaystyle\int \cosh(x)dx = \operatorname{senh}(x) + C.$

DICA: $\operatorname{senh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}, \cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}.$

Exercício 1.6.2. Calcule as integrais:

a) $I_a = \displaystyle\int e^x\left(e^x+1\right)^6 dx$ b) $I_b = \displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg}(x)}$

c) $I_c = \displaystyle\int \frac{\cos(2x)}{2\operatorname{sen}(x)\cos(x)}dx$ d) $I_d = \displaystyle\int \frac{(3x+1)}{1-6x-9x^2}dx$

e) $I_e = \displaystyle\int \frac{a^{\frac{2}{x}}}{x^2}dx, a>0$ f) $I_f = \displaystyle\int 3^x e^x dx$

g) $I_g = \displaystyle\int \left(e^{2x}+a^{2x}\right)^2 dx, a > 0.$

Respostas do Exercício

a) $I_a = \dfrac{(e^x+1)^7}{7} + C$

b) $I_b = \ln|\text{arctg}(x)| + C$

c) $I_c = \dfrac{1}{2}\ln|\text{sen}(2x)| + C$

d) $I_d = -\dfrac{1}{6}\ln|1-6x-9x^2| + C$

e) $I_e = -\dfrac{a^{\frac{2}{x}}}{2\ln(a)} + C, a > 0$

f) $I_f = \dfrac{3^x e^x}{\ln(3)+1} + C$

g) $I_g = \dfrac{e^{4x}}{4} + \dfrac{e^{2x}a^{2x}}{\ln(a)+1} + \dfrac{a^{4x}}{4\ln(a)} + C.$

1.6.6 Integral de $f(u) = \text{sen}(u)$

Seja a função $f(u) = \cos(u)$ e sabendo-se que a sua derivada é igual a $f'(u) = -\text{sen}(u)$, então:

$$\boxed{\int \text{sen}(u)du = -\cos(u) + C.}$$

1.6.7 Integral de $f(u) = \cos(u)$

Sendo a função $f(u) = \text{sen}(u)$ e sabendo-se que a sua derivada é igual a $f'(u) = \cos(u)$, então:

$$\boxed{\int \cos(u)du = \text{sen}(u) + C.}$$

Exemplo 1.6.5. Calcule as seguintes integrais:

a) $I_a = \displaystyle\int \text{sen}(2x+1)dx$

b) $I_b = \displaystyle\int \frac{\text{sen}(\ln(x))}{x}dx$

c) $I_c = \displaystyle\int \left(x^2\text{sen}(2x^3) + \frac{\text{sen}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} - \frac{2x}{1+x^2}\right)dx$

d) $I_d = \displaystyle\int e^x\cos(e^x)dx$

e) $I_e = \displaystyle\int \left(\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{2^x} + \frac{\cos(\frac{1}{x})}{x^2}\right)dx$

f) $I_f = \displaystyle\int \frac{x\cos(\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}}dx.$

Solução:

a) $I_a = \displaystyle\int \text{sen}(2x+1)dx.$

Sabendo-se que pelas integrais imediatas a $\int \text{sen}(u)du = -\cos(u) + C$, procede-se com a seguinte mudança de variável:

$$u = 2x + 1, \quad \text{logo}, \quad du = 2dx.$$

Reescrevendo-se a integral na variável u tem-se:

$$I_n = \int \text{sen}(u)\frac{du}{2}.$$

Aplicando a Propriedade i, chega-se à integral imediata da função seno 1.6.6:

$$I_n = \frac{1}{2}\int \text{sen}(u)du = -\frac{\cos(u)}{2} + C.$$

Como foi considerada inicialmente que $u = 2x + 1$, retorna-se a variável x para se obter o resultado de I_a:

$$I_a = -\frac{\cos(2x+1)}{2} + C.$$

b) $I_b = \displaystyle\int \frac{\text{sen}(\ln(x))}{x}dx.$

Procede-se da mesma forma que no exemplo anterior com a mudança de variável:

$$u = \ln(x), \quad \text{logo}, \quad du = \frac{1}{x}dx.$$

Reescrevendo-se a integral na variável u, obtém-se a integral imediata da função seno 1.6.6:

$$I_n = \int \text{sen}(u)du = -\cos(u) + C.$$

Retorna-se a variável x para se obter o resultado de I_b:

$$I_b = -\cos(\ln|x|) + C.$$

c) $I_c = \displaystyle\int \left(x^2\text{sen}(2x^3) + \frac{\text{sen}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} - \frac{2x}{1+x^2}\right)dx.$

Aplica-se primeiramente a Propriedade ii, obtendo-se uma soma de integrais:

$$I_n = \int x^2\text{sen}(2x^3)dx + \int \frac{\text{sen}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx - \int \frac{2x}{1+x^2}dx.$$

Resolve-se cada uma das integrais separadamente, considerando:

$$I_n = I_1 + I_2 + I_3.$$

A solução da integral $I_1 = \int x^2 \text{sen}(2x^3)dx$ é obtida com a mudança de variável $u = 2x^3$ e $du = 6x^2dx$.

$$I_1 = \int \frac{\text{sen}(u)}{6}du = \frac{1}{6}\int \text{sen}(u)du \quad \text{(Propriedade i)}$$
$$= -\frac{\cos(u)}{6} + C. \quad \text{(Integral Imediata)}$$

Retornando à variável original:

$$I_1 = -\frac{\cos(2x^3)}{6} + C.$$

No processo de solução de $I_2 = \displaystyle\int \frac{\text{sen}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx$ se faz a mudança de variável $u = \sqrt{x}$ e $du = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx$.

$$I_2 = \int 2\,\text{sen}(u)du = 2\int \text{sen}(u)du \quad \text{(Propriedade i)}$$
$$= -2\cos(u) + C. \quad \text{(Integral Imediata 1.6.7)}$$

Voltando para a variável x obtém-se:

$$I_2 = -2\cos(\sqrt{x}\,) + C.$$

A integral $I_3 = -\displaystyle\int \frac{2x}{1+x^2}dx$ pode ser resolvida com a mudança de variável $u = 1 + x^2$ e $du = 2xdx$:

$$I_3 = -\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C. \quad \text{(Integral Imediata 1.6.3)}$$

Retorna-se à variável x:

$$I_3 = \ln|1 + x^2| + C.$$

Obtém-se o resultado de I_n somando $I_1 + I_2 + I_3$:

$$I_n = -\frac{\cos(2x^3)}{6} - 2\cos(\sqrt{x}) - \ln|1 + x^2| + C.$$

d) $I_d = \displaystyle\int e^x \cos(e^x)dx.$

Sabendo-se que pelas integrais imediatas a $\displaystyle\int \cos(u)du = \text{sen}(u) + C$, procede-se com a mudança de variável:

$$u = e^x, \quad \text{logo}, \quad du = e^x dx.$$

Reescrevendo-se a integral na variável u, chega-se a integral imediata da função cosseno 1.6.7:

$$I_n = \int \cos(u)du = \text{sen}(u) + C.$$

Como foi considerada inicialmente que $u = e^x$, retorna-se a variável x para se obter o resultado de I_d:

$$I_d = \text{sen}(e^x) + C.$$

e) $I_e = \displaystyle\int \left(\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{2^x} + \frac{\cos(\frac{1}{x})}{x^2} \right) dx.$

Aplicam-se manipulações algébricas e a Propriedade ii:

$$I_e = \int x^{\frac{1}{2}} dx + \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{2^x} dx + \int \frac{\cos(\frac{1}{x})}{x^2} dx.$$

Para o último termo da soma acima, faz-se uma mudança de variável, onde $u = \dfrac{1}{x}$ e $du = -\dfrac{1}{x^2}dx$, logo:

$$I_n = -\int \cos(u)du = -\text{sen}(u) + C. \quad \text{(Integral Imediata 1.6.7)}$$

Retornando à variável x:

$$I_n = -\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) + C.$$

Para os demais termos da soma tem-se uma soma de integrais imediatas:

$$I_m = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + \ln|x| - \frac{2^{-x}}{\ln(2)} + C.$$

Somando $I_m + I_n$ obtém-se o resultado final de I_e:

$$I_e = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + \ln|x| - \frac{2^{-x}}{\ln(2)} - \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) + C.$$

f) $I_f = \displaystyle\int \frac{x\cos(\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}} dx.$

Procede-se inicialmente com a mudança de variável:

$$u = \sqrt{x^2+1}, \quad \text{logo,} \quad du = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx.$$

Reescrevendo-se a integral na variável u, chega-se a integral imediata da função cosseno:

$$I_n = \int \cos(u)du = \text{sen}(u) + C.$$

Retorna-se à variável x e obtém-se:

$$I_f = \text{sen}(\sqrt{x^2+1}) + C.$$

1.6.8 Integral de $f(u) = \text{tg}(u)$

Seja a função $f(u) = \text{tg}(u)$, sua integral é

$$\boxed{\int \text{tg}(u)du = \ln|\sec(u)| + C.}$$

Observação 1.6.1. A integral da função $f(u) = \text{tg}(u)$ também pode ser escrita como:

$$\int \text{tg}(u)du = -\ln|\cos(u)| + C.$$

Demonstração:

Sabe-se que a função tangente é definida por $\text{tg}(u) = \dfrac{\text{sen}(u)}{\cos(u)}$, portanto pode-se reescrever a integral como $\displaystyle\int \text{tg}(u)du = \int \frac{\text{sen}(u)}{\cos(u)}du$.

Utilizando-se o método da substituição, tem-se:

$$v = \cos(u) \quad \text{e} \quad dv = -\text{sen}(u)du.$$

Reescreve-se a integral na variável v e:

$$I_n = -\int \frac{dv}{v} = -\ln|v| + C. \quad \text{(Integral Imediata 1.6.3)}$$

Retornando-se à variável u:

$$I_n = -\ln|\cos(u)| + C.$$

Aplicando-se a Propriedade dos Logaritmos:

$$-\ln|\cos(u)| = \ln|(\cos(u))^{-1}| = \ln|\sec(u)|.$$

Obtém-se assim:

$$\int \text{tg}(u)du = -\ln|(\cos(u))| + C = \ln|\sec(u)| + C.$$

Exemplo 1.6.6. Calcule as integrais:

a) $I_a = \displaystyle\int \text{tg}(3x)dx$ b) $I_b = \displaystyle\int \frac{\text{tg}(\ln(x))}{x}dx$

Solução:

a) $I_a = \int \operatorname{tg}(3x)dx$.

Pode-se reescrever essa integral como $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(3x)}{\cos(3x)}dx$, e aplica-se a mudança de variável: $u = \cos(3x)$, então $du = -3\operatorname{sen}(3x)dx$. Tem-se:

$$\begin{aligned} I_n &= \int -\frac{du}{3u} = -\frac{1}{3}\int \frac{du}{u} \quad \text{(Propriedade i)} \\ &= -\frac{1}{3}\ln|u| + C. \quad \text{(Integral imediata 1.6.3)} \end{aligned}$$

Retornando-se à variável x, obtém-se:

$$I_a = -\frac{1}{3}\ln|\cos(3x)| = \frac{1}{3}\ln|\sec(3x)| + C. \quad \text{(Propriedade dos Logaritmos)}$$

b) $I_b = \displaystyle\int \frac{\operatorname{tg}(\ln(x))}{x}dx$.

Para resolver a integral I_b, procede-se com a mudança de variável onde $u = \ln(x)$, logo $du = \dfrac{dx}{x}$. Reescreve-se a integral na variável u:

$$I_n = \int \operatorname{tg}(u)du = -\ln|\cos(u)| + C. \quad \text{(Integral Imediata 1.6.8)}$$

Retornando-se à variável x e aplicando a Propriedade dos Logaritmos obtém-se:

$$I_b = -\ln|\cos(\ln(x))| = \ln|\sec(\ln(x))| + C.$$

1.6.9 Integral de $f(u) = \operatorname{cotg}(u)$

Seja a função cotangente $f(u) = \operatorname{cotg}(u)$, sua integral é:

$$\boxed{\int \operatorname{cotg}(u)du = -\ln|\operatorname{cosec}(u)| + C.}$$

Observação 1.6.2. A integral da função $f(u) = \operatorname{cotg}(u)$ também pode ser escrita como:

$$\int \operatorname{cotg}(u)du = \ln|\operatorname{sen}(u)| + C.$$

Demonstração:

A função cotangente é definida como $\operatorname{cotg}(u) = \dfrac{\cos(u)}{\operatorname{sen}(u)}$, portanto pode-se escrever a integral da forma: $\displaystyle\int \operatorname{cotg}(u)du = \int \frac{\cos(u)}{\operatorname{sen}(u)}du$.

Aplicando-se o método da substituição, onde $v = \text{sen}(u)$ e $dv = \cos(u)du$:

$$I_n = \int \frac{dv}{v} = \ln|\text{sen}(v)| + C. \quad \text{(Integral Imediata 1.6.3)}$$

Retorna-se à variável original u e aplica-se a Propriedade dos Logaritmos:

$$I_n = \ln|\text{sen}(u)| = -\ln|\text{cosec}(u)| + C.$$

Exemplo 1.6.7. Calcule as integrais:

a) $I_a = \displaystyle\int \text{cotg}(5x)dx$ b) $I_b = \displaystyle\int \frac{\text{cotg}(e^{-x})}{e^x}dx$

Solução:

a) $I_a = \displaystyle\int \text{cotg}(5x)dx.$

Pode-se reescrever essa integral como $I_n = \displaystyle\int \frac{\cos(5x)}{\text{sen}(5x)}dx$, e aplica-se a mudança de variável onde $u = \text{sen}(5x)$ e $du = 5\cos(5x)dx$. Reescrevendo:

$$\begin{aligned} I_n = \int \frac{du}{5u} &= \frac{1}{5}\int \frac{du}{u} \quad \text{(Propriedade i)} \\ &= \frac{1}{5}\ln|u| + C. \quad \text{(Integral imediata 1.6.3)} \end{aligned}$$

Retornando-se à variável x:

$$I_a = \frac{1}{5}\ln|\text{sen}(5x)| = -\frac{1}{5}\ln|\text{cosec}(5x)| + C. \quad \text{(Propriedade dos Logaritmos)}$$

b) $I_b = \displaystyle\int \frac{\text{cotg}(e^{-x})}{e^x}dx.$

Procede-se com a seguinte mudança de variável:

$$u = e^{-x}, \quad \text{logo,} \quad du = -e^{-x}dx.$$

Reescreve-se a integral na variável u:

$$\begin{aligned} I_n = \int -\text{cotg}(u)du &= -\int \text{cotg}(u)du \quad \text{(Propriedade i)} \\ &= -\ln|\text{sen}(u)| + C. \quad \text{(Integral Imediata 1.6.9)} \end{aligned}$$

Retornando-se à variável x e aplicando a Propriedade dos Logaritmos obtém-se:

$$I_b = -\ln|\text{sen}(e^{-x})| + C = \ln|\text{cosec}(e^{-x})| + C.$$

1.6.10 Integral de $f(u) = \sec(u)$

Seja a função $f(u) = \sec(u)$, sua integral é:

$$\boxed{\int \sec(u)du = \ln|\sec(u) + \operatorname{tg}(u)| + C.}$$

Demonstração:

Para determinar a integral da função secante, multiplica-se e divide-se o integrando pelo termo $[\sec(u) + \operatorname{tg}(u)]$, (esse termo permite o uso do método da substituição), isto é:

$$I_n = \int \sec(u) \left[\frac{\sec(u) + \operatorname{tg}(u)}{\sec(u) + \operatorname{tg}(u)}\right] du = \int \left[\frac{\sec^2(u) + \sec(u)\operatorname{tg}(u)}{\sec(u) + \operatorname{tg}(u)}\right] du.$$

Resolve-se a integral pelo método da substituição, com a mudança de variável $v = \sec(u) + \operatorname{tg}(u)$ e $dv = [\sec(u)\operatorname{tg}(u) + \sec^2(u)]\, du$:

$$I_n = \int \frac{dv}{v} = \ln|v| + C.$$

Retornando-se à variável u,

$$\int \sec(u)du = \ln|\sec(u) + \operatorname{tg}(u)| + C.$$

1.6.11 Integral de $f(u) = \operatorname{cosec}(u)$

Considere a função $f(u) = \operatorname{cosec}(u)$ sua integral é da forma:

$$\boxed{\int \operatorname{cosec}(u)du = \ln|\operatorname{cosec}(u) - \operatorname{cotg}(u)| + C.}$$

Observação 1.6.3. $\displaystyle\int \operatorname{cosec}(u)du = -\ln|\operatorname{cosec}(u) + \operatorname{cotg}(u)| + C.$

Demonstração:

Para resolver a integral de $f(u) = \operatorname{cosec}(u)$ deve-se multiplicar e dividir o integrando pelo termo $[\operatorname{cosec}(u) - \operatorname{cotg}(u)]$, (termo que permite o uso do método da substituição), isto é:

$$I_n = \int \operatorname{cosec}(u) \left[\frac{\operatorname{cosec}(u) - \operatorname{cotg}(u)}{\operatorname{cosec}(u) - \operatorname{cotg}(u)}\right] du = \int \left[\frac{\operatorname{cosec}^2(u) - \operatorname{cosec}(u)\operatorname{cotg}(u)}{\operatorname{cosec}(u) - \operatorname{cotg}(u)}\right] du.$$

Através do método da substituição, fazendo $v = \operatorname{cosec}(u) - \operatorname{cotg}(u)$ e $dv = [\operatorname{cosec}^2(u) - \operatorname{cosec}(u)\operatorname{cotg}(u)]\, du$ obtém-se:

$$I_n = \int \frac{dv}{v} = \ln|v| + C.$$

Retornando-se à variavel u,

$$\int \operatorname{cosec}(u)du = \ln|\operatorname{cosec}(u) - \operatorname{cotg}(u)| + C.$$

Exemplo 1.6.8. Calcule as integrais:

a) $I_a = \displaystyle\int \sec\left(\frac{6}{5}x\right) dx$ b) $I_b = \displaystyle\int \frac{x^3}{\cos(x^4)} dx$ c) $I_c = \displaystyle\int \operatorname{cosec}\left(\frac{x}{3}\right) dx.$

Solução:

a) $I_a = \displaystyle\int \sec\left(\frac{6}{5}x\right) dx.$

Primeiro se faz a troca de variável onde $u = \dfrac{6}{5}x$, logo $du = \dfrac{6}{5}dx$. Reescreve-se aplicando a Propriedade i:

$$I_n = \frac{5}{6}\int \sec(u)du.$$

Agora multiplica-se o termo $[\sec(u) + \operatorname{tg}(u)]$ pelo numerador e denominador da integral I_n:

$$I_n = \frac{5}{6}\int \sec(u)\left[\frac{\sec(u) + \operatorname{tg}(u)}{\sec(u) + \operatorname{tg}(u)}\right] du = \frac{5}{6}\int \left[\frac{\sec^2(u) + \sec(u)\operatorname{tg}(u)}{\sec(u) + \operatorname{tg}(u)}\right] du.$$

Faz-se novamente uma mudança de variável em que $v = \sec(u) + \operatorname{tg}(u)$ e $dv = [\sec(u)\operatorname{tg}(u) + \sec^2(u)]\, du$. A integral I_n na variável v é reescrita como:

$$I_n = \frac{5}{6}\int \frac{dv}{v} = \frac{5}{6}\ln|v| + C. \quad \text{(Integral Imediata 1.6.3)}$$

Retornando às variáveis u e x, obtém-se o resultado:

$$I_a = \frac{5}{6}\ln\left|\sec\left(\frac{6}{5}x\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{6}{5}x\right)\right| + C.$$

b) $I_b = \displaystyle\int \frac{x^3}{\cos(x^4)} dx.$

Novamente se faz uma primeira mudança de variável:

$$u = x^4, \quad \text{logo,} \quad du = 4x^3dx.$$

Reescrevendo e aplicando a Propriedade i, é obtida a nova integral I_n:

$$I_n = \frac{1}{4}\int \frac{du}{\cos(u)} = \frac{1}{4}\int \sec(u)du.$$

Multiplica-se o numerador e o denominador pelo termo $[\sec(u) + \text{tg}(u)]$:

$$I_n = \frac{1}{4}\int \sec(u)\left[\frac{\sec(u) + \text{tg}(u)}{\sec(u) + \text{tg}(u)}\right] du = \frac{1}{4}\int \left[\frac{\sec^2(u) + \sec(u)\text{tg}(u)}{\sec(u) + \text{tg}(u)}\right] du.$$

Com uma nova mudança de variável onde $v = \sec(u) + \text{tg}(u)$ e portanto $dv = [\sec(u)\text{tg}(u) + \sec^2(u)]\, du$, reescreve-se I_n como:

$$I_n = \frac{1}{4}\int \frac{dv}{v} = \frac{1}{4}\ln|v| + C. \quad \text{(Integral Imediata 1.6.3)}$$

Retorna-se às variáveis u e x, e tem-se:

$$I_b = \frac{1}{4}\ln|\sec(x^4) + \text{tg}(x^4)| + C.$$

c)$I_c = \displaystyle\int \text{cosec}\left(\frac{x}{3}\right) dx.$

Começa-se com a seguinte mudança de variável em que $u = \dfrac{x}{3}$ e $du = \dfrac{1}{3}\, dx$. Escreve-se a nova integral I_n na variável u:

$$I_n = 3\int \text{cosec}(u).$$

Multiplicando o termo $\dfrac{\text{cosec}(u) - \text{cotg}(u)}{\text{cosec}(u) - \text{cotg}(u)}$ em I_n:

$$I_n = 3\int \text{cosec}(u)\left[\frac{\text{cosec}(u) - \text{cotg}(u)}{\text{cosec}(u) - \text{cotg}(u)}\right] du = 3\int \left[\frac{\text{cosec}^2(u) - \text{cosec}(u)\text{cotg}(u)}{\text{cosec}(u) - \text{cotg}(u)}\right] du.$$

Outra mudança de variável é necessária fazendo $v = \text{cosec}(u) - \text{cotg}(u)$ e portanto $dv = [-\text{cosec}(u)\text{cotg}(u) + \text{cosec}^2(u)]\, du$.

Na variável v, reescreve-se I_n da seguinte forma:

$$I_n = 3\int \frac{dv}{v} = 3\ln|v| + C. \quad \text{(Integral Imediata 1.6.3)}$$

Retornando às variáveis u e x, nessa ordem, tem-se:

$$I_c = 3\ln\left|\text{cosec}\left(\frac{x}{3}\right) - \text{cotg}\left(\frac{x}{3}\right)\right| + C.$$

1.6.12 Integral de $f(u) = \sec^2(u)$

Seja uma função $f(u) = \sec^2(u)$, sua integral é da forma:

$$\boxed{\int \sec^2(u)du = \mathrm{tg}(u) + C.}$$

A integral acima é obtida aplicando-se o processo inverso na fórmula correspondente de derivação $\dfrac{d[\mathrm{tg}(u)]}{dx} = \sec^2(u)\dfrac{du}{dx}$.

1.6.13 Integral de $f(u) = \mathrm{cosec}^2(u)$

Considere a função $f(u) = \mathrm{cosec}^2(u)$. Sua integral é da forma:

$$\boxed{\int \mathrm{cosec}^2(u)du = -\mathrm{cotg}(u) + C.}$$

A integral acima é obtida aplicando-se o processo inverso na fórmula correspondente de derivação $\dfrac{d[\mathrm{cotg}(u)]}{dx} = -\mathrm{cosec}^2(u)\dfrac{du}{dx}$.

Exemplo 1.6.9. Obtenha o resultado de:

a) $I_a = \displaystyle\int e^{2x}\sec^2\left(e^{2x}\right)dx$ b) $I_b = \displaystyle\int [1 - \mathrm{cosec}(x)]^2 dx$

Solução:

a) $I_a = \displaystyle\int e^{2x}\sec^2\left(e^{2x}\right)dx.$

Fazendo a mudança de variável onde $u = e^{2x}$ e $du = 2e^{2x}dx$. Reescreve-se a integral I_a na variável u:

$$I_n = \int e^{2x}\sec^2(u)\frac{du}{2e^{2x}} = \frac{1}{2}\int \sec^2(u)du. \quad \text{(Propriedade i)}$$

Pela integral imediata 1.6.12, e retornando-se à variável x, obtém-se:

$$I_a = \frac{1}{2}\mathrm{tg}(e^{2x}) + C.$$

b) $I_b = \displaystyle\int [1 - \mathrm{cosec}(x)]^2 dx.$

Desenvolvendo o produto notável do integrando e aplicando as Propriedades i e ii obtém-se:

$$I_b = \int dx - 2\int \mathrm{cosec}(x)dx + \int \mathrm{cosec}^2(x)dx.$$

Obteve-se uma soma de integrais imediatas 1.6.1, 1.6.11, 1.6.13, logo, o resultado de I_b é:

$$I_b = x - 2\ln|\mathrm{cosec}(x) - \mathrm{cotg}(x)| - \mathrm{cotg}(x) + C.$$

1.6.14 Integral de $f(u) = \sec(u)\mathrm{tg}(u)$

Seja a função definida por $f(u) = \sec(u)\mathrm{tg}(u)$. A integral de $f(u)$ é dada por

$$\boxed{\int \sec(u)\mathrm{tg}(u)du = \sec(u) + C.}$$

A integral de $f(u)$ é obtida através da fórmula correspondente de derivação $\dfrac{d[\sec(u)]}{dx} = \sec(u)\mathrm{tg}(u)\dfrac{du}{dx}$.

1.6.15 Integral de $f(u) = \mathrm{cosec}(u)\mathrm{cotg}(u)$

Considere a função $f(u) = \mathrm{cosec}(u)\mathrm{cotg}(u)$, sua integral é dada por

$$\boxed{\int \mathrm{cosec}(u)\mathrm{cotg}(u)du = -\mathrm{cosec}(u) + C.}$$

Obtém-se a integral acima integrando-se ambos os membros da equação $\dfrac{d[\mathrm{cosec}(u)]}{dx} = -\mathrm{cosec}(u)\mathrm{cotg}(u)\dfrac{du}{dx}$.

Exemplo 1.6.10. Calcule o resultado de:

a) $I_a = \displaystyle\int \frac{\mathrm{sen}(2x)}{\cos^2(2x)}dx$ b) $I_b = \displaystyle\int e^x\mathrm{cosec}(e^x)\mathrm{cotg}(e^x)dx$

Solução:

a) $I_a = \displaystyle\int \frac{\mathrm{sen}(2x)}{\cos^2(2x)}dx.$

Através de manipulações trigonométricas chega-se a:

$$I_a = \int \frac{\mathrm{sen}(2x)}{\cos(2x)\cos(2x)}dx = \int \frac{\mathrm{tg}(2x)}{\cos(2x)}dx = \int \sec(2x)\mathrm{tg}(2x)dx.$$

Fazendo a mudança de variável $u = 2x$ e $du = 2dx$ e pela Propriedade i:

$$I_n = \int \sec(u)\mathrm{tg}(u)\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int \sec(u)\mathrm{tg}(u)du = \frac{1}{2}\sec(u)+C \quad \text{(Integral Imediata 1.6.14).}$$

Retornando à variável x, obtém-se:

$$I_a = \frac{1}{2}\sec(2x) + C.$$

b) $I_b = \displaystyle\int e^x\mathrm{cosec}(e^x)\mathrm{cotg}(e^x)dx.$

Através da mudança de variável onde $u = e^x$ e $du = e^x dx$, reescreve-se I_b na variável u:

$$I_n = \int \text{cosec}(u)\text{cotg}(u)du = -\text{cosec}(u) + C. \quad \text{(Integral Imediata 1.6.15)}$$

Retorna-se a variável x e se obtém o resultado de I_b:

$$I_b = -\text{cosec}(e^x) + C.$$

1.6.16 Exercício: Regras de Integração - Parte II

Exercício 1.6.3. Calcule as seguintes integrais:

a) $I_a = \int \text{sen}(x)\cos(x)dx$

b) $I_b = \int \cos^2(x)dx$

c) $I_c = \int x\cos(x^2)dx$

d) $I_d = \int \text{cotg}(3x-1)dx$

e) $I_e = \int \text{tg}(\pi x)dx$

f) $I_f = \int \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}dx$

g) $I_g = \int \text{cosec}(2x)\text{cotg}(2x)dx$

h) $I_h = \int \frac{\sec^2(x)}{\sqrt{1+\text{tg}(x)}}dx$

i) $I_i = \int \frac{dx}{\cos(2x)}$

j) $I_j = \int \text{tg}^2\left(\frac{1}{3}x\right)\sec^2\left(\frac{1}{3}x\right)dx$

k) $I_k = \int \sec^2(x)e^{\text{tg}(x)}dx.$

Respostas do Exercício

a) $(*) I_a = -\frac{\cos(2x)}{4} + C$

b) $I_b = \frac{1}{2}\left[\frac{\text{sen}(2x)}{2} + x\right] + C$

c) $I_c = \frac{\text{sen}(x^2)}{2} + C$

d) $I_d = \frac{1}{3}\ln|\text{sen}(3x-1)| + C$

e) $I_e = -\frac{1}{\pi}\ln|\cos(\pi x)| + C$

f) $I_f = \ln|\sec(x)| + C$

g) $I_g = -\frac{1}{2}\text{cosec}(2x) + C$

h) $I_h = 2\sqrt{1+\text{tg}(x)} + C$

i) $I_i = \frac{1}{2}\ln|\sec(2x) + \text{tg}(2x)| + C$

j) $I_j = \text{tg}^3\left(\frac{1}{3}x\right) + C$

k) $I_k = e^{\text{tg}(x)} + C.$

(*)Outras respostas equivalentes: $I_a = \frac{\text{sen}^2(x)}{2} + C$, $I_a = -\frac{\cos^2(x)}{2} + C.$

1.7 Lista de Exercícios

1. Calcule as integrais:

a) $I_a = \displaystyle\int \left(\frac{e^{\text{cotg}(\sqrt{x})}}{\sqrt{x}\text{sen}^2(\sqrt{x})} + \frac{3}{x\sqrt{2-\ln(x^2)}} \right) dx$

b) $I_b = \displaystyle\int \frac{2e^{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}\left(e^{\sqrt[3]{x}}+5\right)} dx$

c) $I_c = \displaystyle\int \left(\frac{x^2 e^{x^3}}{3+2e^{x^3}} + \frac{2+\text{sen}(3x)}{\cos^2(3x)} \right) dx$

d) $I_d = \displaystyle\int \left(\frac{-x\text{sen}(3x^2+2)}{1+\cos(3x^2+2)} + \frac{x^2\text{arctg}(x^3)}{1+x^6} \right) dx$

e) $I_e = \displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x[3+2\ln^2(x)]} dx$

f) $I_f = \displaystyle\int \frac{2+\text{cotg}[\ln(x)]}{x\text{sen}^2[\ln(x)]} dx$

g) $I_g = \displaystyle\int \frac{\cos\{\ln[\sec(x)]\} - \text{cosec}^2(x)}{\text{cotg}(x)} dx$

h) $I_h = \displaystyle\int \frac{2+\text{tg}\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)} dx.$

2. Explique o aparente paradoxo abaixo: Aplicando as Propriedades da integral i e ii, tem-se

$$\int (x+1)dx = \frac{x^2}{2} + x + C.$$

Resolvendo essa mesma integral utilizando o método da substituição com $u = x+1$ e $du = dx$, obtém-se

$$\int (x+1)dx = \int u du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{(x+1)^2}{2} + C.$$

Respostas dos Exercícios

1.

a) $I_a = -2e^{\text{cotg}(\sqrt{x})} - 3\sqrt{2-\ln(x^2)} + C$

b) $I_b = \ln\left(e^{\sqrt[3]{x}}+5\right)^6 + C$

c) $I_c = \dfrac{1}{6} \ln \left| 3 + 2e^{x^3} \right| + \dfrac{2}{3} \operatorname{tg}(3x) + \dfrac{1}{3} \sec(3x) + C$

d) $I_d = \dfrac{1}{6} \ln \left| 1 + \cos(3x^2 + 2) \right| + \dfrac{1}{6} \left[\operatorname{arctg}(x^3) \right]^2 + C$

e) $I_e = \dfrac{1}{4} \ln |3 + 2 \ln^2(x)| + C$

f) $I_f = -\dfrac{\{2 + \operatorname{cotg}[\ln(x)]\}^2}{2} + C$

g) $I_g = \operatorname{sen}\{\ln[\sec(x)]\} + \ln |\operatorname{cotg}(x)| + C$

h) $I_h = -2 \ln \left[\sec\left(\dfrac{1}{x}\right) + \operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{x}\right) \right] - \sec\left(\dfrac{1}{x}\right) + C.$

Capítulo 2

Integral Indefinida - Métodos de Integração

2.1 Método de Substituição Trigonométrica

Há meios diferentes para integrar uma função e para cada integral, deve-se identificar qual o melhor método a ser aplicado. A integração por substituição trigonométrica é um caso particular do método da substituição utilizado quando o integrando contém funções algébricas, por exemplo, do tipo:

$$y = \sqrt{a^2 + u^2} \qquad y = \sqrt{a^2 - u^2} \qquad y = \sqrt{u^2 - a^2}$$

ou,

$$y = a^2 + u^2 \qquad y = a^2 - u^2 \qquad y = u^2 - a^2,$$

onde a é uma constante positiva e u uma função de x.

Pode-se relacionar as expressões acima com a relação quadrática entre todos os lados de um triângulo retângulo, ou seja, do Teorema de Pitágoras $y^2 = a^2 + u^2$ (Figura 2.1).

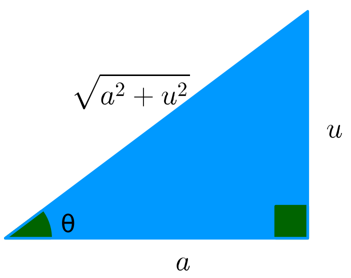
Figura 2.1: Representação do Teorema de Pitágoras $y^2 = a^2 + u^2$.

O método consiste basicamente em substituir a variável u utilizando as relações trigonométricas e as relações métricas no triângulo retângulo, com o objetivo de eliminar o radical ou o termo quadrático e encontrar uma integral imediata.

Consideram-se três casos:

Primeiro caso) Quando a integral envolve $a^2 + u^2$ ou $\sqrt{a^2 + u^2}$.

Tem-se dois triângulos retângulos possíveis. Para cada situação, faz-se uma mudança de variável adequada para obter a solução da integral.



Faz-se a mudança de variável:

$$\frac{u}{a} = \mathrm{tg}(\theta), \quad \text{ou seja,} \quad u = a\mathrm{tg}(\theta).$$

Logo,

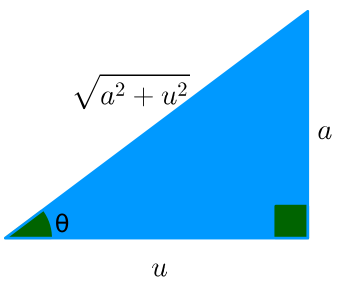
$$du = a\sec^2(\theta)d\theta.$$

Ainda observa-se que:

$$\frac{\sqrt{a^2+u^2}}{a} = \sec(\theta),$$

ou seja,

$$\sqrt{a^2+u^2} = a\sec(\theta).$$



Faz-se a mudança de variável:

$$\frac{a}{u} = \mathrm{tg}(\theta), \quad \text{ou seja,} \quad u = a\mathrm{cotg}(\theta).$$

Então,

$$du = -a\mathrm{cosec}^2(\theta)d\theta.$$

Observa-se ainda que:

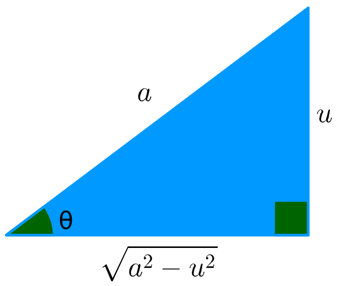
$$\frac{\sqrt{a^2+u^2}}{a} = \mathrm{cosec}(\theta),$$

ou seja,

$$\sqrt{a^2+u^2} = a\mathrm{cosec}(\theta).$$

Segundo caso) Quando a integral envolve $a^2 - u^2$ ou $\sqrt{a^2 - u^2}$.

Tem-se dois triângulos retângulos possíveis. Para cada situação, faz-se uma mudança de variável adequada para obter a solução da integral.



Faz-se a mudança de variável:

$$\frac{u}{a} = \text{sen}(\theta), \quad \text{ou seja}, \quad u = a\text{sen}(\theta),$$

logo,

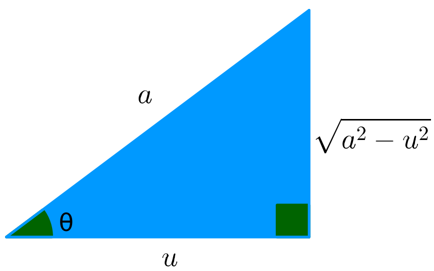
$$du = a\cos(\theta)d\theta.$$

E ainda:

$$\frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{a} = \cos(\theta),$$

ou seja,

$$\sqrt{a^2 - u^2} = a\cos(\theta).$$



Faz-se a mudança de variável:

$$\frac{u}{a} = \cos(\theta), \quad \text{ou seja}, \quad u = a\cos(\theta),$$

então,

$$du = -a\text{sen}(\theta)d\theta.$$

Além disso:

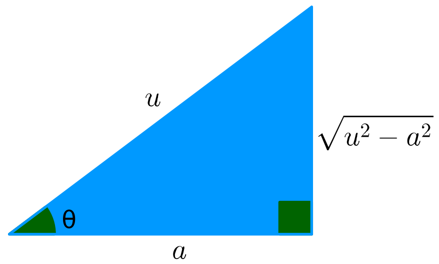
$$\frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{a} = \text{sen}(\theta),$$

ou seja,

$$\sqrt{a^2 - u^2} = a\text{sen}(\theta).$$

Terceiro caso) Se a integral envolve $u^2 - a^2$ ou $\sqrt{u^2 - a^2}$.

Tem-se dois triângulos retângulos possíveis. Para cada situação, faz-se uma mudança de variável adequada para obter a solução da integral.



Faz-se a mudança de variável:

$$\frac{u}{a} = \sec(\theta), \quad \text{ou seja,} \quad u = a\sec(\theta).$$

Logo,

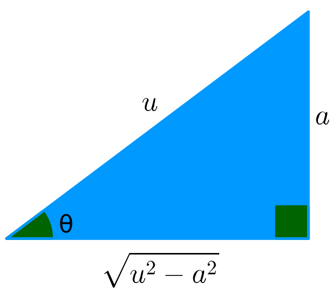
$$du = a\sec(\theta)\mathrm{tg}(\theta)d\theta.$$

Além disso:

$$\frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{a} = \mathrm{tg}(\theta),$$

ou seja,

$$\sqrt{u^2 - a^2} = a\,\mathrm{tg}(\theta).$$



Faz-se a mudança de variável:

$$\frac{u}{a} = \mathrm{cosec}(\theta), \quad \text{ou seja,} \quad u = a\mathrm{cosec}(\theta),$$

então,

$$du = -a\mathrm{cosec}(\theta)\mathrm{cotg}(\theta)d\theta.$$

Além disso:

$$\frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{a} = \mathrm{cotg}(\theta),$$

ou seja,

$$\sqrt{a^2 - u^2} = a\mathrm{cotg}(\theta).$$

Observação 2.1.1. A escolha dos catetos é arbitrária, logo encontrando uma resposta diferente para uma mesma integral, deve-se derivar o resultado a fim de se comparar e comprovar a veracidade do mesmo.

Exemplo 2.1.1. Calcule as integrais:

a) $I_a = \displaystyle\int \frac{x-1}{25+x^2}dx$

b) $I_b = \displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx$

c) $I_c = \displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{36x^2-25}}dx$

d) $I_d = \displaystyle\int \frac{3}{\sqrt{16-x^2}}dx.$

Solução:

a) $I_a = \displaystyle\int \frac{x-1}{25+x^2}dx.$

Essa integral é do primeiro caso, pois contém em seu integrando o termo $25+x^2$, logo uma substituição que pode ser feita é:

$$x = 5\,\mathrm{tg}(\theta) \quad \text{onde} \quad 25 = a^2 \quad \text{e, portanto,} \quad dx = 5\,\sec^2(\theta)\,d\theta.$$

Na integral I_a faz-se a substituição:

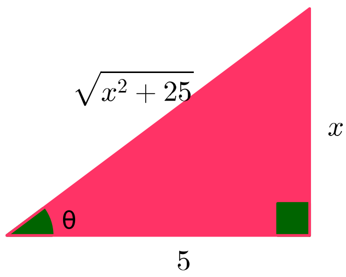


Figura 2.2: Triângulo retângulo empregado na solução de I_a

$$\begin{aligned}
I_n &= \int \frac{(5\,\mathrm{tg}(\theta)-1)}{25+(5\,\mathrm{tg}(\theta))^2}\,5\,\sec^2(\theta)\,d\theta \\
&= \int \frac{5\,\mathrm{tg}(\theta)-1}{25(1+\mathrm{tg}^2(\theta))}\,5\,\sec^2(\theta)\,d\theta \\
&= \int \frac{5\,\mathrm{tg}(\theta)-1}{25\sec^2(\theta)}\,5\,\sec^2(\theta)\,d\theta \\
&= \frac{1}{5}\int (5\,\mathrm{tg}(\theta)-1)d\theta \\
&= \int \mathrm{tg}(\theta)\,d\theta - \frac{1}{5}\int \theta\,d\theta = \ln|\sec(\theta)| - \frac{1}{5}\,\theta + C.
\end{aligned}$$

Para retornar à variável original x deve-se observar no triângulo retângulo, Figura 2.2, que $\sec(\theta) = \dfrac{\sqrt{25+x^2}}{5}$, logo:

$$I_a = \ln\left|\frac{\sqrt{25+x^2}}{5}\right| - \frac{1}{5}\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{5}\right) + C.$$

b) $I_b = \displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx.$

O integrando de $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx$ contém o termo $\sqrt{x^2-9}$, portanto, essa integral é do terceiro caso. Fazendo-se a substituição:

$$x = 3\ \sec(\theta) \quad \text{pois} \quad 9 = a^2 \quad \text{e} \quad dx = 3\ \sec(\theta)\,\mathrm{tg}(\theta)\,d\theta.$$

Substitui-se em I_b:

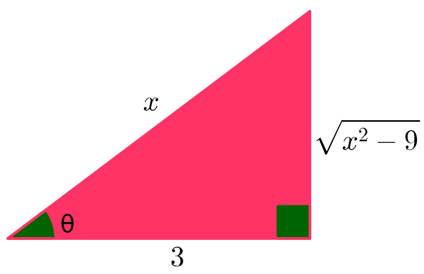


Figura 2.3: Triângulo retângulo empregado na solução de I_b

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{\sqrt{(3\ \sec(\theta))^2-9}}{3\ \sec(\theta)}\,3\ \sec(\theta)\,\mathrm{tg}(\theta)\,d\theta \\ &= \int \sqrt{9(\sec^2(\theta)-1)}\,\mathrm{tg}(\theta)\,d\theta \\ &= 3\int \mathrm{tg}^2(\theta)\,d\theta \\ &= 3\int (\sec^2(\theta)-1)\,d\theta \\ &= 3\,\mathrm{tg}(\theta) - 3\,\theta + C. \end{aligned}$$

Observa-se no triângulo retângulo (Figura 2.3) que $\mathrm{tg}(\theta) = \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{3}$, assim:

$$I_b = \sqrt{x^2-9} - 3\,\mathrm{arcsec}\left(\frac{x}{3}\right) + C.$$

c) $I_c = \displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{36x^2-25}}dx.$

O termo $\sqrt{36x^2-25}$ contido no integrando de I_c requer uma das substituições sugeridas no terceiro caso, observe a Figura 2.4. Sendo assim, tem-se $6x = 5\,\sec(\theta)$, logo $6dx = 5\,\sec(\theta)\,\mathrm{tg}(\theta)\,d\theta$, com $25 = a^2$.

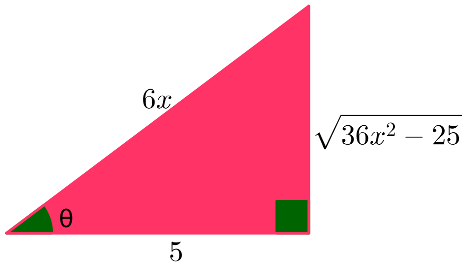


Figura 2.4: Triângulo retângulo empregado na solução de I_c

Reescrevendo I_c na variável θ tem-se:

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{1}{\frac{5}{6}\,\sec(\theta)\,\sqrt{(5\,\sec(\theta))^2-25}}\,\frac{5}{6}\,\sec(\theta)\,\mathrm{tg}(\theta)\,d\theta \\ &= \int \frac{\mathrm{tg}(\theta)}{\sqrt{25(\sec^2(\theta)-1)}}\,d\theta \\ &= \int \frac{\mathrm{tg}(\theta)}{\sqrt{25\,\mathrm{tg}^2(\theta)}}\,d\theta \\ &= \int \frac{\mathrm{tg}(\theta)}{5\,\mathrm{tg}(\theta)}\,d\theta \\ &= \frac{1}{5}\int d\theta = \frac{1}{5}\,\theta + C. \end{aligned}$$

Retorna-se à variável original x:

$$I_c = \frac{1}{5}\,\mathrm{arcsec}\left(\frac{6x}{5}\right) + C.$$

d) $I_d = \displaystyle\int \frac{3}{\sqrt{16-x^2}}dx.$

A integral $\displaystyle\int \frac{3}{\sqrt{16-x^2}}dx$ contém o termo $\sqrt{16-x^2}$ e, portanto, utiliza-se uma das substituições empregadas para o segundo caso, observe a Figura 2.5:

$$x = 4\,\mathrm{sen}(\theta) \quad \text{onde} \quad 16 = a^2 \quad \text{e} \quad dx = 4\,\cos(\theta)\,d\theta.$$

Substitui-se na integral I_d e obtém-se uma nova integral:

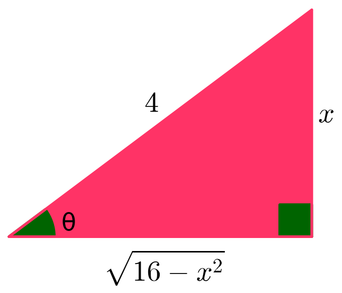


Figura 2.5: Triângulo retângulo empregado na solução de I_d

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{3}{\sqrt{16-(4\,\text{sen}(\theta))^2}}\,4\,\cos(\theta)\,d\theta \\ &= \int \frac{3}{\sqrt{16-16\,\text{sen}^2(\theta)}}\,4\,\cos(\theta)\,d\theta \\ &= \int \frac{3}{4\,\cos(\theta)}\,4\,\cos(\theta)\,d\theta \\ &= 3\int d\theta = 3\,\theta + C. \end{aligned}$$

Reescreve-se na variável x:

$$I_d = 3\text{arcsen}\left(\frac{x}{4}\right) + C.$$

Exemplo 2.1.2. Calcule uma primitiva de $f(x) = \dfrac{1}{16x^2-1}$.

Solução:

Para obter uma primitiva de uma função, deve-se calcular sua integral indefinida.

Seja $I_a = \displaystyle\int \frac{1}{16x^2-1}dx$. Uma possível mudança de variável para esse caso é aquela em que $4x = \sec(\theta)$ e $4dx = \sec(\theta)\,\text{tg}(\theta)\,d\theta$, observe a Figura 2.6.

Então $16x^2 - 1 = \sec^2(\theta) - 1 = \text{tg}^2(\theta)$ e, assim, reescrevendo I_a em termos da variável θ, obtém-se:

$$\begin{aligned} I_n = \int \frac{\frac{\sec(\theta)\,\text{tg}(\theta)}{4}}{\text{tg}^2(\theta)}\,d\theta = \int \frac{\sec(\theta)}{4\,\text{tg}(\theta)}\,d\theta &= \frac{1}{4}\int \text{cosec}(\theta)\,d\theta \\ &= \frac{1}{4}\ln|\text{cosec}(\theta) - \text{cotg}(\theta)| + C. \end{aligned}$$

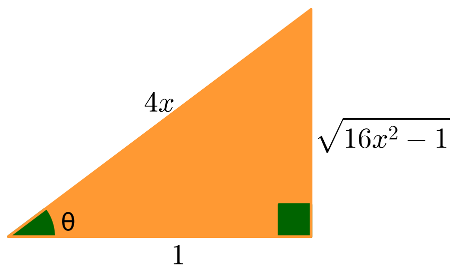


Figura 2.6: Triângulo retângulo empregado na solução de I_a

Retornando à variável inicial x:

$$\begin{aligned} I_a &= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{4x}{\sqrt{16x^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{16x^2-1}}\right| + C \\ &= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{4x-1}{\sqrt{16x^2-1}}\right| + C \\ &= \frac{1}{8}\ln\left|\frac{4x-1}{4x+1}\right| + C. \end{aligned}$$

Exemplo 2.1.3. Mostre que:

a) $I_a = \displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u}du = \sqrt{a^2-u^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right| + C.$

Solução:

O integrando de $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u}du$ contém o termo $\sqrt{a^2-u^2}$, então a integral enquadra-se no segundo caso descrito anteriormente. Portanto, faz-se uma mudança de variável onde $u = a\,\text{sen}(\theta)$ e $du = a\,\cos(\theta)d\theta$.

Desenhando o triângulo retângulo, Figura 2.7, observa-se que $\sqrt{a^2-u^2} = a\,\cos(\theta)$, fato que pode ser verificado na substituição:

$$\sqrt{a^2-u^2} = \sqrt{a^2-[a\,\text{sen}(\theta)]^2} = \sqrt{a^2[1-\text{sen}^2(\theta)]} = a\,\cos(\theta).$$

Reescrevendo a integral na variável θ obtém-se:

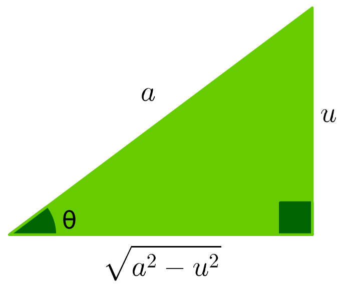


Figura 2.7: Triângulo retângulo empregado na solução de I_a

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int \frac{a\cos(\theta)}{a\,\mathrm{sen}(\theta)} a\cos(\theta)d\theta \\
&= a\int \frac{\cos^2(\theta)}{\mathrm{sen}(\theta)}d\theta \\
&= a\int \frac{1-\mathrm{sen}^2(\theta)}{\mathrm{sen}(\theta)}d\theta \\
&= a\int [\mathrm{cosec}(\theta)-\mathrm{sen}(\theta)]d\theta \\
&= a\int \mathrm{cosec}(\theta)d\theta - a\int \mathrm{sen}(\theta)d\theta \\
&= -a\,\ln|\mathrm{cosec}(\theta)+\mathrm{cotg}(\theta)| + a\cos(\theta) + C.
\end{aligned}
$$

Observação 2.1.2. Para resolver a integral I_n, usa-se $\displaystyle\int \mathrm{cosec}(\theta)d\theta = -\ln|\mathrm{cosec}(\theta)+\mathrm{cotg}(\theta)| + C$.

Para retornar à variável original u, é necessário observar o triângulo retângulo, Figura 2.7, para se obter:

$$\mathrm{cosec}(\theta) = \frac{a}{u} \qquad \text{e} \qquad \mathrm{cotg}(\theta) = \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u}.$$

Logo:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u}du &= -a\,\ln\left|\frac{a}{u}+\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right| + a\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{a} + C \\
&= \sqrt{a^2-u^2} - a\,\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right| + C.
\end{aligned}
$$

b) $I_b = \displaystyle\int \frac{a}{\sqrt{a^2+u^2}}du = a\ln|\sqrt{a^2+u^2}+u| + C.$

Solução:

O termo $\sqrt{a^2+u^2}$ faz com que a integral $\displaystyle\int \frac{a}{\sqrt{a^2+u^2}}du$ seja do primeiro caso. Isto sugere a seguinte mudança de variável:

$$u = a\,\mathrm{tg}(\theta) \qquad \text{logo} \qquad du = a\sec^2(\theta)d\theta.$$

Sendo assim, $\sqrt{a^2+u^2} = \sqrt{a^2 + a^2\mathrm{tg}^2(\theta)} = \sqrt{a^2[1+\mathrm{tg}^2(\theta)]} = a\sec(\theta)$. Reescrevendo a integral em termos da variável θ, obtém-se:

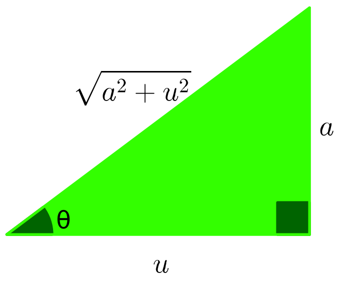


Figura 2.8: Triângulo retângulo empregado na solução de I_b

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{a}{a\sec(\theta)} a\sec^2(\theta)d\theta \\ &= a\int \sec(\theta)d\theta \\ &= a\ \ln|\sec(\theta)+\mathrm{tg}(\theta)| + C. \end{aligned}$$

Observa-se no triângulo retângulo, Figura 2.8, que $\sec(\theta) = \dfrac{\sqrt{a^2+u^2}}{a}$, assim reescreve-se o resultado na variável u:

$$\begin{aligned} \int \frac{a}{\sqrt{a^2+u^2}}du &= a\ \ln\left|\frac{\sqrt{a^2+u^2}}{a} + \frac{u}{a}\right| + C \\ &= a\ \ln\left|\frac{\sqrt{a^2+u^2}+u}{a}\right| + C \\ &= a\ \left[\ln|\sqrt{a^2+u^2}+u| - \ln|a|\right] + C \\ &= a\ \ln|\sqrt{a^2+u^2}+u| - a\ \ln|a| + C. \end{aligned}$$

Como $a\ln|a|$ é um número, pode ser inserido na constante C, logo:

$$I_b = a\ \ln|\sqrt{a^2+u^2}+u| + C.$$

c)$I_c = \displaystyle\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C.$

Solução:

A integral $\displaystyle\int \frac{du}{u^2 - a^2}$ contém em seu integrando a expressão $u^2 - a^2$, então essa integral é resolvida observando uma mudança de variável sugerida pelo terceiro caso. Portanto $u = a\sec(\theta)$ e $du = a\ \sec(\theta)\,\mathrm{tg}(\theta)\,d\theta$. Obtém-se assim:

$$u^2 - a^2 = a^2\sec^2(\theta) - a^2 = a^2\mathrm{tg}^2(\theta).$$

Reescreve-se a integral na variável θ e obtém-se:

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{a\ \sec(\theta)\,\mathrm{tg}(\theta)\,d\theta}{a^2\mathrm{tg}^2(\theta)} \\ &= \int \frac{\sec(\theta)}{a\,\mathrm{tg}(\theta)} d\theta \\ &= \frac{1}{a}\int \mathrm{cosec}(\theta) d\theta \\ &= -\frac{1}{a}\ln|\mathrm{cosec}(\theta) + \mathrm{cotg}(\theta)| + C. \end{aligned}$$

Do triângulo retângulo, Figura 2.9, tem-se $\mathrm{cosec}(\theta) = \dfrac{u}{\sqrt{u^2 - a^2}}$ e

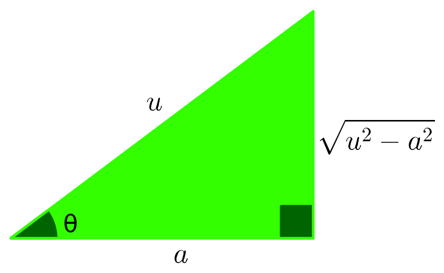


Figura 2.9: Triângulo retângulo empregado na solução de I_c

$\mathrm{cotg}(\theta) = \dfrac{a}{\sqrt{u^2 - a^2}}$. Assim,

$$\int \frac{u}{u^2 - a^2} du = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{u}{\sqrt{u^2 - a^2}} + \frac{a}{\sqrt{u^2 - a^2}}\right| + C.$$

Utilizando as propriedades dos logaritmos e potenciação, obtém-se:

$$\begin{aligned} \int \frac{u}{u^2 - a^2} du &= \frac{1}{a}\ln\left|\frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u + a}\right| + C \\ &= \frac{1}{a}\ln\left|\sqrt{\frac{u^2 - a^2}{(u + a)^2}}\right| + C \\ I_c &= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u - a}{u + a}\right| + C. \end{aligned}$$

2.1.1 Exercícios: Substituição Trigonométrica

Observação 2.1.3. Para a solução dos exercícios a seguir, a escolha dos catetos é feita de forma arbitrária (de acordo com os três casos estudados), logo encontrando uma resposta diferente para uma mesma integral, você deve derivar o resultado a fim de comparar e comprovar a veracidade do mesmo.

Exercício 2.1.1. Calcule as integrais, utilizando o método da substituição trigonométrica:

a) $I_a = \displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ b) $I_b = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{81-x^2}}$ c) $I_c = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{36+x^2}}$

d) $I_d = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+144}}$ e) $I_e = \displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{16-x^2}}$ f) $I_f = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$

g) $I_g = \displaystyle\int \frac{5x^2}{1+4x^6}\,dx$ h) $I_h = \displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$ i) $I_i = \displaystyle\int \frac{15x^4}{\sqrt{1-x^{10}}}\,dx$

j) $I_j = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9-(x-1)^2}}$.

Respostas

2.1.1

a) $I_a = \dfrac{1}{2}\operatorname{arcsen}(x) + \dfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C$ b) $I_b = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x}{9}\right) + C$

c) $I_c = \ln\left|\dfrac{\sqrt{36+x^2}+x}{6}\right| + C$ d) $I_d = \ln\left|\dfrac{\sqrt{x^2+144}+x}{12}\right| + C$

e) $I_e = -\dfrac{1}{16}\,\dfrac{\sqrt{16-x^2}}{x} + C$ f) $I_f = \ln\left|\dfrac{\sqrt{4+x^2}+x}{2}\right| + C$

g) $I_g = \dfrac{5}{6}\operatorname{arctg}(2x^3) + C$ h) $I_h = \ln\left|\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\right| + C$

i) $I_i = 3\operatorname{arcsen}(x^5) + C$ j) $I_j = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x-1}{3}\right) + C.$

Exercício 2.1.2. Mostre que:

a) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^4-2}}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+\sqrt{x^4-2}\right| + C.$

b) $\displaystyle\int \sqrt{16-4x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{16-4x^2} \,+\, 4\,\text{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right) + C.$

Exercício 2.1.3. Calcule uma primitiva de:

a) $f(x) = \dfrac{1}{1-6x^2}$ b) $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{a^2x^2+b^2}}, a \neq 0, b \neq 0.$

Respostas

2.1.3

a) $\dfrac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\dfrac{1+\sqrt{6}x}{\sqrt{1-6x^2}}\right| + C$ b) $\dfrac{1}{a}\ln\left|ax+\sqrt{a^2x^2+b^2}\right| + C.$

2.2 Completando o Quadrado

Através do artifício algébrico de completar o quadrado, pode-se aplicar o método estudado na seção anterior para integrais que envolvem polinômios quadráticos genéricos e suas raízes quadradas, isto é, expressões na forma ax^2+bx+c e $\sqrt{ax^2+bx+c}$.

O processo de completar quadrado baseia-se no fato de que

$$(x+A)^2 = x^2+2Ax+A^2.$$

Exemplo 2.2.1. Mostre que:

a) $x^2+2x+5 = (x+1)^2+4.$

b) $4x^2+8x+5 = 4(x+1)^2+1.$

Solução:

a)$x^2+2x+5 = (x+1)^2+4.$

Tem-se que $2A = 2$, logo $A = 1$. Portanto, para completar o quadrado deve-se somar e subtrair A^2 na expressão x^2+2x+5:

$$x^2+2x+\mathbf{1}-\mathbf{1}+5 = (x^2+2x+1)-1+5 = (x+1)^2+4.$$

b) $4x^2 + 8x + 5 = 4(x+1)^2 + 1$.

Usa-se um artifício algébrico para tornar o coeficiente de x^2 igual a 1:

$$4x^2 + 8x + 5 = 4(x^2 + 2x) + 5 \quad \text{onde} \quad 2A = 2, \quad \text{logo} \quad A = 1.$$

Somando-se $A^2 = 1$ para completar o quadrado, deve-se subtrair 4 na expressão devido ao artifício utilizado anteriormente, sendo assim tem-se:

$$4(x^2 + 2x + \mathbf{1}) + 5 - \ \mathbf{4} = 4(x+1)^2 + 1.$$

Exemplo 2.2.2. Calcule as integrais:

$$\text{a) } I_a = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}} \qquad\qquad \text{b) } I_b = \int \frac{dx}{x^2 - 2x - 8}.$$

Solução:

a) $I_a = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}$.

Completa-se o quadrado do radicando observando que $2A = 2$, logo deve-se somar e subtrair $A^2 = 1$:

$$x^2 + 2x - 3 + 1 - 1 = (x^2 + 2x + 1) - 3 - 1 = (x+1)^2 - 4.$$

Reescreve-se a integral I_a de modo que se pode aplicar o método da substituição trigonométrica fazendo $x + 1 = 2\,\sec(\theta)$, ou seja, $x = 2\,\sec(\theta) - 1$ e, portanto, $dx = 2\,\sec(\theta)\,\mathrm{tg}(\theta)\,d\theta$.

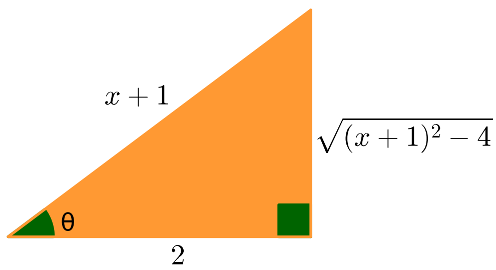


Figura 2.10: Triângulo retângulo empregado na solução de I_a

Reescrevendo I_a na variável θ:

$$\begin{aligned}
I_n &= \int \frac{2\,\sec(\theta)\,\mathrm{tg}(\theta)\,d\theta}{\sqrt{(2\,\sec(\theta))^2-4}}\\
&= \int \frac{2\,\sec(\theta)\,\mathrm{tg}(\theta)\,d\theta}{\sqrt{4\,(\sec^2(\theta)-1)}}\\
&= \int \frac{2\,\sec(\theta)\,\mathrm{tg}(\theta)\,d\theta}{2\,\mathrm{tg}(\theta)}\\
&= \int \sec(\theta)\,d\theta = \ln|\sec(\theta)+\mathrm{tg}(\theta)|+C.
\end{aligned}$$

Do triângulo retângulo, Figura 2.10, sabe-se que $\sec(\theta)=\dfrac{x+1}{2}$ e $\mathrm{tg}(\theta)=\dfrac{\sqrt{(x+1)^2-4}}{2}$. Então reescreve-se I_a na variável x e obtém-se:

$$I_a = \ln\left|\frac{x+1+\sqrt{(x+1)^2-4}}{2}\right|+C.$$

b) $I_b = \displaystyle\int \frac{dx}{x^2-2x-8}$.

Faz-se $2A=-2$ para completar o quadrado, logo:

$$x^2-2x-8=(x^2-2x+1)-8-1=(x-1)^2-9.$$

Pode-se reescrever a integral como $I_b=\displaystyle\int\frac{dx}{(x-1)^2-9}$, que pode ser resolvida pelo método de substituição trigonométrica, basta que seja feita a mudança de variável de $x-1$ para $3\sec(\theta)$. Para isso, considera-se que:

$$x-1=3\,\sec(\theta) \quad \text{ou seja,} \quad x=3\,\sec(\theta)+1 \quad \text{e} \quad dx=3\,\sec(\theta)\,\mathrm{tg}(\theta)\,d\theta,$$

observe a Figura 2.11.

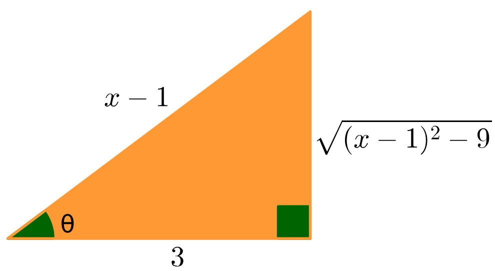


Figura 2.11: Triângulo retângulo empregado na solução de I_b

Reescreve-se I_b na variável θ:

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{3\,\sec(\theta)\,\mathrm{tg}(\theta)\,d\theta}{(3\,\sec(\theta))^2-9} \\ &= \int \frac{3\,\sec(\theta)\,\mathrm{tg}(\theta)\,d\theta}{9(\sec^2(\theta)-1)} \\ &= \frac{1}{3}\int \frac{\sec(\theta)\,d\theta}{\mathrm{tg}(\theta)} \\ &= \frac{1}{3}\int \mathrm{cosec}(\theta)\,d\theta \\ &= \frac{1}{3}\ln|\mathrm{cosec}(\theta)-\mathrm{cotg}(\theta)|+C. \end{aligned}$$

Observa-se no triângulo retângulo, Figura 2.11, que $\mathrm{cosec}(\theta)=\dfrac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2-9}}$ e ainda $\mathrm{cotg}(\theta)=\dfrac{3}{\sqrt{(x-1)^2-9}}$. Logo o resultado de I_b na variável x é:

$$I_b=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-4}{\sqrt{(x-1)^2-9}}\right|+C.$$

Exemplo 2.2.3. Calcule:

a) $\displaystyle\int \frac{x+2}{\sqrt{3+2x-x^2}}\,dx=-\sqrt{3+2x-x^2}+3\,\mathrm{arcsen}\left(\frac{x-1}{2}\right)+C.$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+10}=\frac{1}{3}\mathrm{arctg}\left(\frac{x+1}{3}\right)+C.$

Solução:

a) $\displaystyle\int \frac{x+2}{\sqrt{3+2x-x^2}}\,dx=-\sqrt{3+2x-x^2}+3\,\mathrm{arcsen}\left(\frac{x-1}{2}\right)+C.$

Deve-se completar o quadrado do radicando $\sqrt{3+2x-x^2}$ contido na integral $\displaystyle\int \frac{x+2}{\sqrt{3+2x-x^2}}\,dx$. Usa-se um artifício algébrico para que o coeficiente de x^2 seja igual a 1:

$$\begin{aligned} -x^2+2x+3 &= -(x^2-2x)+3+1-1 \\ &= -(x^2-2x+1)+3+1 \\ &= -(x-1)^2+4=4-(x-1)^2. \end{aligned}$$

Assim, tem-se a integral $I_a=\displaystyle\int \frac{x+2}{\sqrt{4-(x-1)^2}}dx$, que pode ser resolvida aplicando-se o método de substituição trigonométrica sugerido pelo 2º caso, onde $x-1=2\,\mathrm{sen}(\theta)$ e $dx=2\cos(\theta)\,d\theta$, observe a Figura 2.12.

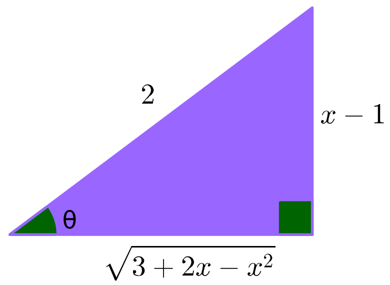


Figura 2.12: Triângulo retângulo empregado na solução de I_a

Reescreve-se I_a na variável θ:

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{(2\,\mathrm{sen}(\theta)+1)+2}{\sqrt{4-[2\,\mathrm{sen}(\theta)^2]}}\,[2\cos(\theta)]\,d\theta \\ &= \int \frac{2\,\mathrm{sen}(\theta)+3}{\sqrt{4[1-\ \mathrm{sen}^2(\theta)]}}\,[2\cos(\theta)]\,d\theta \\ &= \int \frac{2\,\mathrm{sen}(\theta)+3}{\sqrt{4\ \cos^2(\theta)}}\,[2\cos(\theta)]\,d\theta \\ &= \int [2\,\mathrm{sen}(\theta)+3]\ d\theta = 2\int \mathrm{sen}(\theta)\,d\theta + 3\int d\theta \\ &= -2\cos(\theta)+3\,\theta+C. \end{aligned}$$

Observa-se no triângulo retângulo, Figura 2.12, que $\cos(\theta) = \dfrac{\sqrt{3+2x-x^2}}{2}$. Retornando-se à variável original x:

$$I_a = -\sqrt{3+2x-x^2} + 3\,\mathrm{arcsen}\left(\frac{x-1}{2}\right) + C.$$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+10} = \frac{1}{3}\mathrm{arctg}\left(\frac{x+1}{3}\right) + C.$

Completa-se o quadrado de $x^2+2x+10$. Como $2A = 2$, tem-se $A^2 = 1$. Então:

$$x^2+2x+10+1-1 = (x+1)^2+9.$$

Tem-se a integral $I_b = \displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)^2+9}$, que pode ser resolvida a partir da substituição trigonométrica sugerida no 1º caso, onde tem-se $x+1 = 3\,\mathrm{tg}(\theta)$ e $dx = 3\sec^2(\theta)\,d\theta$, observe a Figura 2.13.

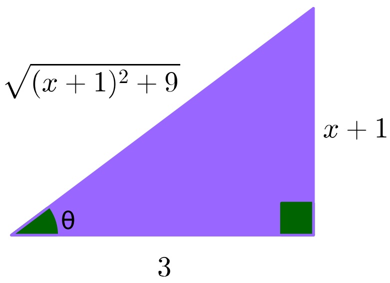


Figura 2.13: Triângulo retângulo empregado na solução de I_b

Reescreve-se I_b na variável θ:

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{3\,\sec^2(\theta)\,d\theta}{[3\,\text{tg}(\theta)]^2+9} \\ &= \int \frac{3\,\sec^2(\theta)\,d\theta}{9[\text{tg}^2(\theta)+1]} \\ &= \int \frac{3\,\sec^2(\theta)\,d\theta}{9\,\sec^2(\theta)} \\ &= \frac{1}{3}\int d\theta = \frac{1}{3}\,\theta + C. \end{aligned}$$

Retorna-se à variável original x:

$$I_b = \frac{1}{3}\,\text{arctg}\left(\frac{x+1}{3}\right) + C.$$

2.2.1 Exercícios: Completando o Quadrado

Exercício 2.2.1. Calcule as integrais:

a) $I_a = \displaystyle\int \frac{3x-1}{x^2-x+1}\,dx$

b) $I_b = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$

c) $I_c = \displaystyle\int \frac{3x-5}{x^2+2x+2}\,dx$

d) $I_d = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x-8}}$.

Respostas

a) $I_a = \dfrac{3}{2}\ln|2x^2-x+1| + \dfrac{\sqrt{3}}{3}\,\text{arctg}\left[\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\right] + C$

b) $I_b = \ln|\sqrt{x^2+2x+3}+x+1| + C$

c) $I_c = \ln|\sqrt{x^2+2x+2}| - 8\,\text{arctg}(x+1) + C$

d) $I_d = \ln\left|(x-1)+\sqrt{x^2-2x-8}\right| + C.$

Exercício 2.2.2. Mostre que:

a) $I_a = \displaystyle\int \frac{dx}{x^2-x+1} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,\text{arctg}\left[\frac{\sqrt{3}}{3}(2x-1)\right] + C.$

b) $I_b = \displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2-2x+5}}\,dx = \sqrt{x^2-2x+5} + \ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+5}\right| + C.$

2.3 Integrais de Funções Racionais

Seja $H(x) = \dfrac{G(x)}{F(x)}$, uma função racional onde $G(x)$ e $F(x)$ são polinômios. Para calcular a $\displaystyle\int H(x)dx$ existem duas situações que levam em consideração o grau dos polinômios $G(x)$ e $F(x)$, a saber:

Situação A) Se o grau do polinômio no numerador for maior ou igual ao grau do polinômio no denominador, tem-se uma fração imprópria e, neste caso, divide-se o numerador pelo denominador obtendo:

$$\frac{G(x)}{F(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{F(x)},$$

onde $Q(x)$ é o quociente e $R(x)$ é o resto da divisão de $G(x)$ por $F(x)$. Sendo assim, calcular a integral de $\displaystyle\int H(x)\,dx$ é o mesmo que calcular:

$$\int \frac{G(x)}{F(x)}\,dx = \int Q(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{F(x)}\,dx.$$

Exemplo 2.3.1. Calcule:

a) $I_a = \displaystyle\int \frac{x^4-2x^2+1}{x^2-2x+1}\,dx$

b) $I_b = \displaystyle\int \frac{(x^2-1)}{x^2+1}\,dx.$

Solução:

a) $I_a = \displaystyle\int \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^2 - 2x + 1}\, dx.$

Como o grau do polinômio no numerador é maior que o grau do polinômio no denominador, deve-se fazer a divisão até encontrar como resto um polinômio com grau menor do que o grau de $F(x)$.

Dividindo $G(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ por $F(x) = x^2 - 2x + 1$ tem-se:

$$\frac{G(x)}{F(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{F(x)} = (x^2 + 2x + 1) + 0.$$

Calcular a integral I_a é o mesmo que calcular:

$$\begin{aligned} I_a = \int Q(x)\, dx &= \int (x^2 + 2x + 1)\, dx \\ &= \int x^2\, dx + 2\int x\, dx + \int dx. \end{aligned}$$

Logo,

$$I_a = \frac{x^3}{3} + x^2 + x + C.$$

b) $I_b = \displaystyle\int \frac{(x^2 - 1)}{x^2 + 1}\, dx.$

Como o grau do polinômio no numerador é igual ao grau do polinômio do denominador, divide-se $G(x) = x^2 - 1$ por $F(x) = x^2 + 1$:

$$\frac{G(x)}{F(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{F(x)} = 1 + \frac{-2}{x^2 + 1}.$$

Assim, escreve-se I_b como:

$$I_b = \int dx + \int \frac{-2}{x^2 + 1}\, dx = x - 2\int \frac{dx}{x^2 + 1}.$$

Para resolver a integral $-2\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + 1}$ é necessário fazer uma mudança de variável onde $x = \operatorname{tg}(\theta)$ e $dx = \sec^2(\theta) d\theta$ (conforme visto na seção anterior).

Logo,

$$I_b = x - 2\operatorname{arctg}(x) + C.$$

Situação B) Quando o grau do polinômio no numerador é menor que o grau do polinômio no denominador, tem-se uma fração própria que pode ser representada como uma soma de frações parciais. Para isso é necessário decompor essa fração utilizando o Método de Decomposição em Frações Parciais, que consiste em decompor o polinômio do denominador $F(x)$ como um produto de fatores lineares e/ou quadráticos irredutíveis. Consideram-se quatro casos:

Primeiro Caso: As raízes do polinômio do denominador $F(x)$ são reais e distintas.

Se os fatores do polinômio do denominador são lineares e distintos, escreve-se o denominador como $F(x) = k(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$, onde k é o coeficiente principal de $F(x)$. Supondo $k = 1$ tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{G(x)}{F(x)} &= \frac{G(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)}\\ &= \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \ldots + \frac{A_n}{x-a_n}.\end{aligned}$$

Onde A_i são as constantes a determinar e a_i são as raízes do polinômio, com $i = \{1, 2, \ldots, n\}$. Logo,

$$\int \frac{G(x)}{F(x)}\,dx = \int \frac{A_1}{x-a_1}\,dx + \int \frac{A_2}{x-a_2}\,dx + \ldots + \int \frac{A_n}{x-a_n}\,dx.$$

Exemplo 2.3.2. Calcule:

a) $I_a = \displaystyle\int \frac{x-1}{x^3-x^2-2x}\,dx$ b) $I_b = \displaystyle\int \frac{x^4-x^3-3x^2-2x+2}{x^3+x^2-2x}\,dx.$

Solução:

a) $I_a = \displaystyle\int \frac{x-1}{x^3-x^2-2x}\,dx.$

Fatorando o denominador tem-se:

$$\frac{x-1}{x^3-x^2-2x} = \frac{x-1}{x(x-2)(x+1)}.$$

Assim, escreve-se:

$$\frac{x-1}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1}. \tag{2.3.1}$$

Calculando o m.m.c. no segundo membro e realizando as operações necessárias, obtém-se:

$$x - 1 = A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2).$$

Agrupando os termos semelhantes, tem-se uma identidade que possibilita determinar as constantes A, B e C:

$$x - 1 = (A+B+C)x^2 + (-A+B-2C)x - 2A.$$

Comparam-se os respectivos termos da equação acima e obtém-se o sistema:

$$
\begin{aligned}
A + B + C &= 0 \\
-A + B - 2C &= 1 \\
-2A &= -1.
\end{aligned}
$$

A solução do sistema é: $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{6}$ e $C = -\frac{2}{3}$.
Reescrevendo (3.5.1):

$$\frac{x-1}{x(x-2)(x+1)} = \frac{\frac{1}{2}}{x} + \frac{\frac{1}{6}}{x-2} + \frac{-\frac{2}{3}}{x+1}.$$

Assim, a integral I_a pode ser expressa como:

$$I_a = \int \frac{x-1}{x^3 - x^2 - 2x}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x+1}.$$

Portanto,

$$I_a = \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{6}\ln|x-2| - \frac{2}{3}\ln|x+1| + C.$$

b) $I_b = \displaystyle\int \frac{x^4 - x^3 - 3x^2 - 2x + 2}{x^3 + x^2 - 2x}\, dx.$

Como o grau do polinômio no numerador é maior que o grau do polinômio no denominador, primeiramente deve-se dividir $G(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 - 2x + 2$ por $F(x) = x^3 + x^2 - 2x$, obtendo:

$$\frac{G(x)}{F(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{F(x)} = (x-2) + \frac{x^2 - 6x + 2}{x^3 + x^2 - 2x}.$$

Assim a integral I_b pode ser escrita como a soma das integrais I_1 e I_2:

$$I_b = I_1 + I_2 = \int (x-2)\, dx + \int \frac{x^2 - 6x + 2}{x^3 + x^2 - 2x}\, dx.$$

A integral I_1 é resolvida facilmente utilizando a regra da potência, logo:

$$
\begin{aligned}
I_1 = \int (x-2)\, dx &= \int x\, dx - 2\int dx \\
&= \frac{x^2}{2} - 2x + C.
\end{aligned}
$$

Para resolver I_2 é necessário aplicar o método das frações parciais. Fatorando a expressão do denominador tem-se:

$$\frac{x^2-6x+2}{x^3+x^2-2x} = \frac{x^2-6x+2}{x(x-1)(x+2)}.$$

Assim, escreve-se:

$$\frac{x^2-6x+2}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}. \tag{2.3.2}$$

Calculando o m.m.c. e realizando as operações necessárias, obtém-se:

$$x^2-6x+2 = A(x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-1). \tag{2.3.3}$$

Da identidade $x^2-6x+2 = (A+B+C)x^2+(A+2B-C)x-2A$, obtida pelo agrupamento dos termos semelhantes na equação (3.6.1), têm-se o sistema:

$$\begin{aligned} A+B+C &= 1 \\ A+2B-C &= -6 \\ -2A &= 2. \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema, encontram-se $A=-1$, $B=-1$ e $C=3$.

Reescrevem-se os valores de A, B e C em (3.5.2):

$$\frac{x^2-6x+2}{x(x-1)(x+2)} = \frac{-1}{x} + \frac{-1}{x-1} + \frac{3}{x+2}.$$

Sendo assim, a integral I_2 pode ser expressa como:

$$\begin{aligned} I_2 &= -\int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x-1} + 3\int \frac{dx}{x+2} \\ &= -\ln|x| - \ln|x-1| + 3\ln|x+2| + C. \end{aligned}$$

O resultado de I_b é obtido somando os resultados de I_1 e I_2:

$$I_b = \frac{x^2}{2} - 2x - \ln|x| - \ln|x-1| + 3\ln|x+2| + C.$$

Segundo Caso: As raízes do polinômio do denominador $F(x)$ são reais e repetidas.

Neste caso escreve-se $F(x) = k(x-a_i)^n(x-b_i)^m \dots (x-c_i)$, onde o fator $(x-a_i)$ se repete n vezes, e o fator $(x-b_i)$ se repete m vezes. Se $n=1$,

$m = 1, \ldots$, então resolve-se pelo método do caso 1. Para cada fator repetido n vezes, tem-se uma correspondente soma de n frações parciais.

Supondo $k = 1$, tem-se $\dfrac{G(x)}{F(x)} = \dfrac{G(x)}{(x-a_i)^n(x-b_i)^m \ldots (x-c_i)}$. Ou seja,

$$\frac{G(x)}{F(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^n} + \frac{A_2}{(x-a)^{n-1}} + \ldots + \frac{A_n}{x-a} + \frac{B_1}{(x-b)^m} + \frac{B_2}{(x-b)^{m-1}} + \\ \ldots + \frac{B_m}{x-b} + \ldots + \frac{C}{x-c}.$$

Logo,

$$\int H(x)dx = \int \frac{A_1}{(x-a)^n}dx + \int \frac{A_2}{(x-a)^{n-1}}dx + \ldots + \int \frac{A_n}{x-a}dx + \int \frac{B_1}{(x-b)^m}dx + \\ \ldots + \int \frac{B_m}{x-b}dx + \ldots + \int \frac{C}{x-c}dx.$$

Exemplo 2.3.3. Mostre que:

a)$I_a = \displaystyle\int \frac{1}{x^3+3x^2}\,dx = -\frac{1}{3x} + \frac{1}{9}\ln\left|\frac{x+3}{x}\right| + C.$

b)$I_b = \displaystyle\int \frac{x-8}{x^3-4x^2+4x}\,dx = \ln\left|\frac{(x-2)^2}{x^2}\right| + \frac{3}{x-2} + C.$

Solução:

a)$I_a = \displaystyle\int \frac{1}{x^3+3x^2}\,dx = -\frac{1}{3x} + \frac{1}{9}\ln\left|\frac{x+3}{x}\right| + C.$

Fatorando-se o termo $x^3 + 3x^2$, chega-se à $x^2(x+3)$, onde se tem uma raiz repetida, a saber $x = 0$. Logo a representação em frações parciais fica na forma:

$$\frac{1}{x^2(x+3)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+3}. \tag{2.3.4}$$

Calculando o m.m.c. e eliminando os denominadores em (3.6.2), obtém-se:

$$1 = A(x+3) + Bx(x+3) + Cx^2$$
$$1 = (B+C)x^2 + (A+3B)x + 3A.$$

Agrupam-se os termos semelhantes e se escreve o sistema:

$$B + C = 0$$
$$A + 3B = 0$$
$$3A = 1.$$

A solução do sistema acima é $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{9}$ e $C = \frac{1}{9}$.
Reescrevendo A, B e C em (3.6.2), obtém-se:

$$\frac{1}{x^2(x+3)} = \frac{\frac{1}{3}}{x^2} + \frac{-\frac{1}{9}}{x} + \frac{\frac{1}{9}}{x+3}.$$

Sendo assim, a integral I_a pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} I_a &= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2} - \frac{1}{9}\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{9}\int \frac{dx}{x+3} \\ &= -\frac{1}{3x} - \frac{1}{9}\ln|x| + \frac{1}{9}\ln|x+3| + C. \end{aligned}$$

Portanto,

$$I_a = -\frac{1}{3x} + \frac{1}{9}\ln\left|\frac{x+3}{x}\right| + C.$$

b) $I_b = \displaystyle\int \frac{x-8}{x^3-4x^2+4x}\,dx = \ln\left|\frac{(x-2)^2}{x^2}\right| + \frac{3}{x-2} + C.$

O termo $x^3 - 4x^2 + 4x$ pode ser escrito na forma fatorada como $x(x-2)^2$, onde se tem uma raiz repetida, a saber $x = 2$. Sendo assim a representação em frações parciais é escrita como:

$$\frac{x-8}{x(x-2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}. \tag{2.3.5}$$

Calcula-se o m.m.c. eliminado os denominadores para obter:

$$\begin{aligned} x-8 &= A(x-2)^2 + Bx(x-2) + Cx \\ x-8 &= (A+B)x^2 + (-4A-2B+C)x + 4A. \end{aligned}$$

Após agrupar os termos semelhantes escreve-se o sistema:

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ -4A - 2B + C &= 1 \\ 4A &= -8. \end{aligned}$$

A solução para o sistema é: $A = -2$, $B = 2$ e $C = -3$.
Reescrevendo (3.7.3):

$$\frac{x-8}{x(x-2)^2} = \frac{-2}{x} + \frac{2}{x-2} + \frac{-3}{(x-2)^2}.$$

A integral I_b pode ser escrita como a soma de integrais:

$$\begin{aligned} I_b &= -2\int \frac{dx}{x} + 2\int \frac{dx}{x-2} - 3\int \frac{dx}{(x-2)^2} \\ &= -2\ln|x| + 2\ln|x-2| + \frac{3}{x-2} + C. \end{aligned}$$

Sendo assim,

$$I_b = \ln\left|\frac{(x-2)^2}{x^2}\right| + \frac{3}{x-2} + C.$$

Terceiro Caso: O denominador contém fatores quadráticos com raízes complexas.

Para cada fator do tipo x^2+px+q, sendo $p^2 < 4q$ tem-se uma fração simples correspondente da forma $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$.

Se $F(x) = x^2+px+q$, escreve-se:

$$\int \frac{G(x)}{F(x)}\,dx = \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx.$$

Exemplo 2.3.4. Mostre que:

a) $I_a = \displaystyle\int \frac{x}{(x^2+1)(x-1)}\,dx = -\frac{1}{4}\ln|x^2+1| + \frac{1}{2}\text{arctg}(x) + \frac{1}{2}\ln|x-1| + C.$

b) $I_b = \displaystyle\int \frac{8x^2+3x+20}{x^3+x^2+4x+4}\,dx = \frac{3}{2}\ln|x^2+4| + 5\ln|x+1| + C.$

Solução:

a) $I_a = \displaystyle\int \frac{x}{(x^2+1)(x-1)}\,dx = -\frac{1}{4}\ln|x^2+1| + \frac{1}{2}\text{arctg}(x) + \frac{1}{2}\ln|x-1| + C.$

O denominador já se encontra na forma fatorada e como um de seus fatores é quadrático, as frações parciais correspondentes são escritas na forma:

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1}. \tag{2.3.6}$$

Calculando o m.m.c. em (2.3.6) e realizando as operações necessárias, obtém-se:

$$x = (Ax+B)(x-1) + C(x^2+1).$$

A fim de obter os valores de A, B e C, agrupam-se os termos semelhantes e se obtém o sistema:

$$\begin{aligned} A + C &= 0 \\ -A + B &= 1 \\ -B + C &= 0. \end{aligned}$$

A solução obtida para o sistema é: $A = -\frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{2}$ e $C = \frac{1}{2}$.

Reescrevendo (2.3.6), obtém-se:

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}{(x^2+1)} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1}.$$

Para resolver a integral I_a escreve-se:

$$I_a = -\frac{1}{2}\int \frac{x}{x^2+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1}. \tag{2.3.7}$$

Logo,

$$I_a = -\frac{1}{4}\ln|x^2+1| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x) + \frac{1}{2}\ln|x-1| + C.$$

Observação 2.3.1. Cada parcela do resultado final de I_a corresponde ao cálculo da respectiva integral em (2.3.7).

b) $I_b = \displaystyle\int \frac{8x^2+3x+20}{x^3+x^2+4x+4}\,dx = \frac{3}{2}\ln|x^2+4| + 5\ln|x+1| + C.$

Fatorando a expressão x^3+x^2+4x+4 tem-se um fator quadrático:

$$x^3+x^2+4x+4 = (x+1)(x^2+4).$$

Logo a soma de frações parciais pode ser escrita como:

$$\frac{8x^2+3x+20}{x^3+x^2+4x+4} = \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{C}{x+1}. \tag{2.3.8}$$

Calcula-se o m.m.c. em (2.3.8) e eliminado os denominadores, obtém-se:

$$\begin{aligned} 8x^2+3x+20 &= (Ax+B)(x+1) + (C)(x^2+4) \\ 8x^2+3x+20 &= Ax^2+Ax+Bx+B+Cx^2+4C. \end{aligned}$$

Deve-se agrupar os termos semelhantes a fim de se obter a identidade:

$$8x^2+3x+20 = (A+C)x^2 + (A+B)x + (B+4C). \tag{2.3.9}$$

Da identidade (2.3.9) resulta o sistema:

$$A + C = 8$$

$$A + B = 3$$

$$B + 4C = 20.$$

A solução para o sistema é: $A = 3$, $B = 0$ e $C = 5$.

Reescreve-se (2.3.8) com os valores de A, B e C:

$$\frac{8x^2 + 3x + 20}{x^3 + x^2 + 4x + 4} = \frac{3x}{x^2 + 4} + \frac{5}{x + 1}.$$

A integral I_b pode então ser escrita como:

$$I_b = 3 \int \frac{x}{x^2 + 4}\, dx + 5 \int \frac{dx}{x + 1}.$$

Assim,

$$I_b = \frac{3}{2} \ln|x^2 + 4| + 5 \ln|x + 1| + C.$$

Quarto Caso: O denominador contém fatores quadráticos com raízes complexas e repetidas.

Se $x^2 + px + q$ é um fator de $F(x)$ que se repete n vezes, então para esse fator existe uma soma de n frações parciais da forma:

$$\frac{G(x)}{F(x)} = \frac{A_1x + B_1}{(x^2 + px + q)^n} + \frac{A_2x + B_2}{(x^2 + px + q)^{n-1}} + \ldots + \frac{A_nx + B_n}{x^2 + px + q}$$

Logo:

$$\int \frac{G(x)}{F(x)}\, dx = \int \frac{A_1x + B_1}{(x^2 + px + q)^n} dx + \int \frac{A_2x + B_2}{(x^2 + px + q)^{n-1}} dx + \ldots + \int \frac{A_nx + B_n}{x^2 + px + q}\, dx.$$

Exemplo 2.3.5. Mostre que:

$$I = \int \frac{x^3 + x + 2}{x(x^2 + 1)^2}\, dx = 2 \ln|x| - \ln|x^2 + 1| + \operatorname{arctg}(x) + \frac{1}{x^2 + 1} + C.$$

Solução:

O fator quadrático $(x^2 + 1)$ aparece repetido, portanto a representação em frações parciais fica na forma:

$$\frac{x^3 + x + 2}{x(x^2 + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 1)^2} \tag{2.3.10}$$

Calcula-se o m.m.c. eliminando o denominador em (3.17):

$$x^3 + x + 2 = A(x^2+1)^2 + (Bx + C)x(x^2+1) + (Dx + E)x.$$

Agrupando os termos semelhantes, obtém-se:

$$x^3 + x + 2 = (A+B)x^4 + Cx^3 + (2A + B + D)x^2 + (C + E)x + A. \qquad (2.3.11)$$

Escreve-se (3.7.2) como um sistema:

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ C &= 1 \\ 2A + B + D &= 0 \\ C + E &= 1 \\ A &= 2. \end{aligned}$$

A solução para este sistema é: $A = 2$, $B = -2$, $C = 1$, $D = -2$ e $E = 0$.

Reescreve-se (3.17) como:

$$\frac{x^3 + x + 2}{x(x^2+1)^2} = \frac{2}{x} + \frac{-2x+1}{x^2+1} + \frac{-2x}{(x^2+1)^2}.$$

A integral I_a pode então ser escrita como uma soma de integrais:

$$\begin{aligned} I &= 2\int \frac{dx}{x} + \int \frac{-2x+1}{x^2+1}\,dx + \int \frac{-2x}{(x^2+1)^2}\,dx \\ &= 2\int \frac{dx}{x} - \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{dx}{x^2+1} - \int \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx. \end{aligned}$$

Logo,

$$I = 2\ \ln|x| - \ln|x^2+1| + \operatorname{arctg}(x) + \frac{1}{x^2+1} + C.$$

Observação 2.3.2. As frações parciais estudadas até o momento apresentam-se nas seguintes formas gerais,

$$\frac{A}{(x-a)^2} \quad \text{ou} \quad \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

As funções do primeiro tipo podem ser integradas utilizando o método da substituição, e os resultados serão funções racionais ou logarítmicas. Já funções do segundo tipo, nas quais os polinômios quadráticos $x^2 + px + q$ possuem fatores lineares irredutíveis, podem ser integradas através do emprego do completamento de quadrado e do método de substituição trigonométrica. Obtém-se, portanto, integrais do tipo,

$$\int \frac{u\,du}{(u^2+a^2)^n}, \int \frac{du}{(u^2+a^2)^n}.$$

Métodos de solução para integrais do primeiro tipo foram estudados nas seções anteriores, bem como para integrais do segundo tipo para $n = 1$. O caso $n > 1$ pode ser reduzido ao caso $n = 1$, por aplicação repetida da chamada **Fórmula de redução**,

$$\int \frac{du}{(u^2+a^2)^n} = \frac{1}{2a^2(n-1)} \cdot \frac{u}{(u^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2a^2(n-1)} \int \frac{du}{(u^2+a^2)^{n-1}}. \quad (2.3.12)$$

2.3.1 Exercícios: Integrais de Funções Racionais

Exercício 2.3.1. Resolva::

a) Calcule o valor da integral dada por $I_a = \displaystyle\int \frac{11x+17}{2x^2+7x-4}\,dx$.

b) Encontre o valor de $I_b = \displaystyle\int \frac{x^2}{x+2}\,dx$.

c) Resolva a integral $I_c = \displaystyle\int \frac{1}{2x^2+3x+1}\,dx$.

Respostas

a) $I_a = 3\ln|x+4| + \dfrac{5}{2}\ln|2x-1| + C$.

b) $I_b = \dfrac{x^2}{2} - 2x + 4\ln|x+2| + C$.

c) $I_c = \ln\left|\dfrac{2x+1}{x+1}\right| + C$.

Exercício 2.3.2. Resolva as integrais:

a) $I_a = \displaystyle\int \frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}\,dx$

b) $I_b = \displaystyle\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^2}\,dx$

c) $I_c = \displaystyle\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}\,dx$

d) $I_d = \displaystyle\int \frac{x^3-3x+3}{x^2+x-2}\,dx$

e) $I_e = \displaystyle\int \frac{1}{x^3+8}\,dx$

f) $I_f = \displaystyle\int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}\,dx$

Respostas

a) $I_a = -\dfrac{3}{2}\ln|x| + \dfrac{5}{3}\ln|x-1| - \dfrac{1}{6}\ln|x+2| + C$

b) $I_b = x + \ln|x| + \ln|x-1| - \dfrac{2}{x-1} + C$

c) $I_c = \dfrac{2-x}{4(x^2+2)} - \dfrac{\sqrt{2}}{8}\,\text{arctg}\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right) + \dfrac{1}{2}\,\ln|x^2+2| + C$

d) $I_d = \dfrac{x^2}{2} - x + \dfrac{1}{3}\,\ln|x-1| - \dfrac{1}{3}\,\ln|x+2| + C$

e) $I_e = \dfrac{1}{24}\,\ln\left|\dfrac{(x+2)^2}{x^2-2x+4}\right| + \dfrac{\sqrt{3}}{12}\,\text{arctg}\left(\dfrac{x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$

f) $I_f = \dfrac{5}{2}\text{arctg}(x) + \dfrac{x}{2(x^2+1)} + C.$

Exercício 2.3.3. Mostre que:

a)$I_a = \displaystyle\int \frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}dx = \ln|x+1| + \frac{-x-2}{2(x^2+2x+3)} - \frac{\sqrt{2}}{4}\text{arctg}\left[\frac{\sqrt{2}(x+1)}{2}\right] + C.$

b)$I_b = \displaystyle\int \frac{x}{x^3-1}dx = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln|x^2+x+1| + \frac{\sqrt{3}}{3}\text{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C.$

2.4 Integrais de Funções Irracionais

Quando uma integral envolver termos onde a variável x está elevada a uma potência fracionária do tipo $x^{\frac{p}{n}}$, realiza-se a mudança de variável $x = z^n$, onde n é o mínimo múltiplo comum dos denominadores dos expoentes.

Exemplo 2.4.1. Calcule as integrais:

a) $I_a = \displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}\,dx$ b) $I_b = \displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,dx$ c) $I_c = \displaystyle\int \frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x^7}+\sqrt[4]{x^5}}\,dx.$

Solução:

a)$I_a = \displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}\,dx.$

Tem-se $x^{\frac{1}{2}}$ e $x^{\frac{3}{4}}$, logo deverá ser feita a substituição $x = z^4$, onde 4 é o m.m.c. dos denominadores dos expoentes $\{2,4\}$ e $dx = 4z^3dz$.

Reescreve-se a integral na variável z:

$$I_n = \int \frac{z^2}{z^3+1}\,4z^3dz = \int \frac{4z^5}{z^3+1}\,dz.$$

Assim a integral I_n torna-se a integral de uma função racional. Faz-se a divisão dos polinômios $4z^5$ e z^3+1, pois o grau do polinômio do numerador é maior que o grau do polinômio do denominador, tem-se:

$$\begin{aligned} I_n &= \int 4z^2\,dz - \int \frac{4z^2}{z^3+1}\,dz \\ &= \frac{4z^3}{3} - \frac{4}{3}\ln|z^3+1| + C. \end{aligned}$$

Retornando à variável inicial, substituindo $z^3 = \sqrt[4]{x^3}$, obtém-se:

$$I_a = \frac{4\sqrt[4]{x^3}}{3} - \frac{4}{3}\ln|\sqrt[4]{x^3}+1| + C.$$

b) $I_b = \displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,dx.$

Fazendo a substituição $x = z^2$, tem-se $dx = 2zdz$. Logo, a integral I_b na variável z é escrita como:

$$I_n = \int \frac{z}{z^2+1}\,2zdz = \int \frac{2z^2}{z^2+1}\,dz.$$

Dividindo o numerador pelo denominador tem-se:

$$\begin{aligned} I_n &= 2\int dz - 2\int \frac{dz}{z^2+1} \\ &= 2z + 2\,\mathrm{arctg}(z) + C. \end{aligned}$$

Reescrevendo a integral na variável x, substituindo z por $\sqrt{x}$, obtém-se:

$$I_a = 2\sqrt{x} - 2\,\mathrm{arctg}(\sqrt{x}) + C.$$

c) $I_c = \displaystyle\int \frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x^7}+\sqrt[4]{x^5}}\,dx.$

Na integral I_c tem-se a variável x elevada aos expoentes: $\frac{1}{6}$, $\frac{7}{6}$ e $\frac{5}{4}$, cujo m.m.c. dos denominadores é 12. Logo, deve-se fazer a substituição em que $x = z^{12}$ e $dx = 12z^{11}dz$. Sendo assim reescreve-se a nova integral na variável z:

$$I_n = \int \frac{(z^2+1)}{z^{14}+z^{15}}\,12z^{11}dz = 12\int \frac{z^2+1}{z^3+z^4}\,dz.$$

Fatorando o termo z^3+z^4 tem-se a soma de frações parciais:

$$\frac{z^2+1}{z^3(1+z)} = \frac{A}{z^3} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z} + \frac{D}{z+1}. \tag{2.4.1}$$

Calculando o m.m.c. em (3.7.1) e eliminando o denominador, obtém-se:

$$z^2 + 1 = A(z+1) + Bz(z+1) + Cz^2(z+1) + Dz^3.$$

Agrupando os termos semelhantes, tem-se:

$$z^2 + 1 = (C+D)z^3 + (B+C)z^2 + (A+B)z + A. \tag{2.4.2}$$

Da identidade (3.7.4), obtém-se o sistema:

$$\begin{aligned} C + D &= 0 \\ B + C &= 1 \\ A + B &= 0 \\ A &= 1. \end{aligned}$$

A solução encontrada é: $A = 1$, $B = -1$, $C = 2$ e $D = -2$.

Reescreve-se (3.7.1):

$$\frac{z^2+1}{z^3(1+z)} = \frac{1}{z^3} + \frac{-1}{z^2} + \frac{2}{z} + \frac{-2}{z+1}.$$

Assim, a integral I_n pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} I_n &= 12\left[\int \frac{1}{z^3}dz + \int \frac{-1}{z^2}dz + \int \frac{2}{z}dz + \int \frac{-2}{z+1}dz\right] \\ &= 12\left[-\frac{z^{-2}}{2} + \frac{1}{z} + 2\,\ln|z| - 2\,\ln|z+1|\right] + C. \end{aligned}$$

Retornando à variável original x, substituindo z por $\sqrt[12]{x}$, obtém-se:

$$I_c = -\frac{6}{x^{1/6}} + \frac{1/12}{x^{12}} + 24\,\ln\left|\frac{x^{\frac{1}{12}}}{x^{\frac{1}{12}}+1}\right| + C.$$

2.4.1 Exercícios: Integrais de Funções Irracionais

Exercício 2.4.1. Mostre que:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{3+\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} - 6\ln|3+\sqrt{x}| + C.$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x}-1)} = 3\,\sqrt[3]{x} + 3\,\ln|\sqrt[3]{x}-1| + C.$

2.5 Integração por Partes

Se u e v são funções diferenciáveis de uma mesma variável independente, então a fórmula para integração por partes é escrita como:

$$\int u\,dv = uv - \int vdu. \tag{2.5.1}$$

Demonstração:

Sejam u e v funções diferenciáveis de uma mesma variável independente x, a diferencial do produto dessas duas funções é dada por:

$$d(uv) = udv + vdu.$$

A equação acima pode ser reescrita como:

$$udv = d(uv) - vdu.$$

Integrando ambos os membros da equação anterior:

$$\int u\,dv = \int d(uv) - \int v\,du$$
$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

O principal objetivo da integração por partes é escolher u e dv convenientemente, e assim obter uma nova integral mais fácil de calcular do que a integral dada. Em geral, a escolha é feita por tentativa, não existem regras específicas, mas deve-se escolher u e dv de modo que, u seja mais fácil de derivar e dv mais fácil de integrar.

Exemplo 2.5.1. Mostre que:

a) $I_a = \displaystyle\int xe^x\,dx = xe^x - e^x + C.$

b) $I_b = \displaystyle\int x\,\ln(x)\,dx = \frac{x^2}{2}\ln|x| - \frac{x^2}{4} + C.$

c) $I_c = \displaystyle\int \text{arcsen}(x)\,dx = x\,\text{arcsen}(x) + \sqrt{1-x^2} + C.$

d) $I_d = \displaystyle\int x\,\text{sen}(x)\,dx = -x\,\cos(x) + \text{sen}(x) + C.$

Solução:

a) $I_a = \displaystyle\int xe^x\,dx = xe^x - e^x + C.$

O integrando é o produto das funções x e e^x. Deve-se escolher uma delas para ser u e a outra para ser v, a fim de escrever $\displaystyle\int udv$.

Seja $u = x$ e $dv = e^x dx$, tem-se:

$$du = dx \qquad \text{e} \qquad v = \int e^x dx = e^x.$$

Escrevendo na fórmula de integração por partes (2.5.1), isto é,

$$\int udv = uv - \int vdu,$$

obtém-se:

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x dx.$$

Portanto,

$$I_a = xe^x - e^x + C.$$

b) $I_b = \displaystyle\int x\,\ln(x)\,dx = \frac{x^2}{2}\,\ln|x| - \frac{x^2}{4} + C.$

Tem-se no integrando o produto das funções x e $\ln|x|$. Deve-se escolher convenientemente u e dv.

Seja $u = \ln(x)$ e $dv = x\,dx$, então:

$$du = \frac{1}{x}\,dx \qquad \text{e} \qquad v = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}.$$

Passando para a fórmula de integração por partes (2.5.1), isto é,

$$\int udv = uv - \int vdu,$$

obtém-se:

$$\begin{aligned}\int x\,\ln(x)\,dx &= \frac{x^2}{2}\,\ln|x| - \int \frac{x^2}{2x}\,dx \\ &= \frac{x^2}{2}\,\ln|x| - \frac{1}{2}\int x\,dx.\end{aligned}$$

Logo,

$$I_b = \frac{x^2}{2}\,\ln|x| - \frac{x^2}{4} + C.$$

c)$I_c = \displaystyle\int \operatorname{arcsen}(x)\,dx = x\operatorname{arcsen}(x) + \sqrt{1-x^2} + C.$

O integrando contém uma função trigonométrica inversa e não há regra imediata para determinar a solução. Nesse caso, a única escolha é:

$$u = \operatorname{arcsen}(x) \qquad \text{e} \qquad dv = dx.$$

Logo,

$$du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \qquad \text{e} \qquad v = \int dx = x.$$

Reescrevendo na fórmula de integração por partes (2.5.1), tem-se

$$\int \operatorname{arcsen}(x)\,dx = x\operatorname{arcsen}(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx. \tag{2.5.2}$$

Para resolver a integral $I = -\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ é necessário utilizar o método da substituição, considera-se

$$s = 1 - x^2 \qquad \text{e} \qquad ds = -2x\,dx.$$

Sendo assim, escreve-se I na nova variável s:

$$I_n = \frac{1}{2}\int s^{-\frac{1}{2}}\,ds = s^{\frac{1}{2}} + C.$$

Retornando à variável x:

$$I = -\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sqrt{1-x^2} + C.$$

Retorna-se em (2.5.2), para obter:

$$\int \operatorname{arcsen}(x)\,dx = x\operatorname{arcsen}(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Logo,

$$I_c = x\operatorname{arcsen}(x) + \sqrt{1-x^2} + C.$$

d) $I_d = \displaystyle\int x\operatorname{sen}(x)\,dx = -x\,\cos(x) + \operatorname{sen}(x) + C.$

O integrando contém o produto de uma função polinomial x por uma função trigonométrica $\operatorname{sen}(x)$.

A escolha mais conveniente é tomar $u = x$ e $dv = \text{sen}(x)\,dx$. Logo,

$$du = dx \qquad \text{e} \qquad v = \int \text{sen}(x)\,dx = -\cos(x).$$

Escreve-se, então, na fórmula de integração por partes (2.5.1):

$$\int x\,\text{sen}(x)\,dx = -x\,\cos(x) - \int -\cos(x)\,dx$$

Desse modo,

$$I_d = -x\,\cos(x) + \text{sen}(x) + C.$$

*Fica como exercício testar a outra possibilidade de escolha: $u = \text{sen}(x)$ e $dv = xdx$.

Exemplo 2.5.2. Calcule as integrais:

a) $I_a = \displaystyle\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}\,dx$ b) $I_b = \displaystyle\int \ln^2(x)\,dx$ c) $I_c = \displaystyle\int e^{ax}\cos(bx)\,dx, a \neq 0, b \neq 0.$

Solução:

a) $I_a = \displaystyle\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}\,dx.$

O integrando contém um produto e um quociente de funções, tornando a escolha de u e v mais complicada. Por tentativa e erro, chega-se a uma escolha do tipo:

$$u = xe^x \qquad \text{e} \qquad dv = \frac{dx}{(1+x)^2}.$$

Logo,

$$du = (e^x + xe^x)dx \qquad \text{e} \qquad v = -\frac{1}{(1+x)}.$$

Na fórmula de integração por partes (2.5.1), escreve-se:

$$\begin{aligned}\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}\,dx &= -\frac{xe^x}{1+x} - \int -\frac{(e^x + xe^x)}{(1+x)}\,dx \\ &= -\frac{xe^x}{1+x} + \int \frac{e^x(1+x)}{(1+x)}\,dx \\ &= -\frac{xe^x}{1+x} + \int e^x\,dx\end{aligned}$$

Portanto, $I_a = -\dfrac{xe^x}{1+x} + e^x + C.$

b) $I_b = \displaystyle\int \ln^2(x)\, dx$.

Tem-se no integrando a potência da função $\ln|x|$, restando assim uma única escolha, ou seja, $u = \ln^2(x)$ e $dv = dx$, então:

$$du = 2\frac{\ln(x)}{x}\, dx \qquad \text{e} \qquad v = \int dx = x.$$

Escrevendo na fórmula de integração por partes (2.5.1) , tem-se:

$$\int \ln^2(x)\, dx = x\, \ln^2|x| - 2\int \ln(x)\, dx \tag{2.5.3}$$

Neste caso, tem-se a aplicação sucessiva de Integração por Partes. Para a integral $I_n = \displaystyle\int \ln(x)\, dx$, tem-se:

$$u = \ln(x) \quad , \quad dv = dx \quad , \quad du = \frac{1}{x}\, dx \quad \text{e} \quad v = \int dx = x.$$

Na fórmula de integração por partes (2.5.1), obtém-se:

$$\int \ln(x)\, dx = x\, \ln|x| - \int dx$$

$$I_n = x\, \ln|x| - x + C.$$

Retornando em (3.7.4), tem-se o resultado de I_b:

$$\begin{aligned} I_b &= x\, \ln^2|x| - 2\int \ln(x)\, dx \\ &= x\, \ln^2|x| - 2[x\, \ln|x| - x + C]. \end{aligned}$$

Logo,

$$I_b = x\, \ln^2|x| - 2x\, \ln|x| + 2x + C.$$

c) $I_c = \displaystyle\int e^{ax} \cos(bx)\, dx$.

O integrando contém as funções exponencial e trigonométrica.

Seja $u = e^{ax}$ e $dv = \cos(bx)dx$, tem-se:

$$du = ae^{ax}\, dx \quad \text{e} \quad v = \frac{\text{sen}(bx)}{b}.$$

Escreve-se na fórmula de integração por partes (2.5.1):

$$\int e^{ax} \cos(bx)\, dx = e^{ax}\, \frac{\text{sen}(bx)}{b} - \int \frac{ae^{ax}\, \text{sen}(bx)}{b}\, dx$$

$$I_c = \frac{1}{b} e^{ax}\, \text{sen}(bx) - \frac{a}{b}\int e^{ax}\, \text{sen}(bx)\, dx.$$

É necessário aplicar novamente a integração por partes (2.5.1) para resolver a integral $I_n = \displaystyle\int e^{ax}\,\text{sen}(bx)\,dx$, onde são feitas as escolhas:

$$u = e^{ax} \qquad du = ae^{ax}\,dx$$
$$dv = \text{sen}(bx)dx \qquad v = -\frac{\cos(bx)}{b}.$$

Na fórmula de integração por partes (2.5.1), tem-se:

$$\int e^{ax}\,\text{sen}(bx)\,dx = -\frac{1}{b}e^{ax}\,\cos(bx) - \int -\frac{a}{b}\,e^{ax}\,\cos(bx)\,dx$$
$$I_n = -\frac{1}{b}e^{ax}\,\cos(bx) + \frac{a}{b}\int e^{ax}\,\cos(bx)\,dx.$$

A integral inicial I_c aparece novamente na solução de I_n que pode então ser escrita como:

$$I_n = -\frac{1}{b}e^{ax}\,\cos(bx) + \frac{a}{b}I_c.$$

Retornando à primeira integração por partes, tem-se:

$$I_c = \frac{1}{b}e^{ax}\,\text{sen}(bx) - \frac{a}{b}\left[-\frac{1}{b}e^{ax}\,\cos(bx) + \frac{a}{b}I_c\right]$$
$$I_c = \frac{1}{b}e^{ax}\,\text{sen}(bx) + \frac{a}{b^2}e^{ax}\,\cos(bx) - \frac{a^2}{b^2}I_c.$$

Isolando I_c, obtém-se:

$$I_c + \frac{a^2}{b^2}I_c = \frac{1}{b}e^{ax}\,\text{sen}(bx) + \frac{a}{b^2}e^{ax}\,\cos(bx)$$
$$I_c\left(\frac{a^2+b^2}{b^2}\right) = \frac{1}{b}e^{ax}\,\text{sen}(bx) + \frac{a}{b^2}e^{ax}\,\cos(bx)$$

Sendo assim,

$$I_c = \frac{b^2}{a^2+b^2}\,e^{ax}\left[\frac{1}{b}\,\text{sen}(bx) + \frac{a}{b^2}\,\cos(bx)\right] + C.$$

$$I_c = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\,[b\,\text{sen}(bx) + a\,\cos(bx)] + C.$$

Exemplos complementares - Outros tipos de soluções

A seguir apresentam-se exemplos cuja solução não é imediata e não envolve a aplicação de um método de integração específico.

Calcule as integrais:

a) $I_a = \displaystyle\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$

Solução:

$$\begin{aligned}
I_a &= \int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}dx \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx \\
&= \operatorname{arcsen}(x) + \sqrt{1-x^2} + C.
\end{aligned}$$

b) $I_b = \displaystyle\int e^{\sqrt{x}}dx$

Solução:

Considere $u = \sqrt{x}$, de onde tem-se $x = u^2$. Portanto, $dx = 2udu$. Resolve-se a integral por partes:

$$I_b = 2\int ue^u du.$$

c) $I_c = \displaystyle\int \frac{dx}{1-\cos(x)}$

Solução:

$$\begin{aligned}
I_c &= \int \frac{1}{1-\cos(x)} \frac{[1+\cos(x)]}{[1+\cos(x)]}dx \\
&= \int \frac{1+\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)}dx \\
&= \int \left[\operatorname{cosec}^2(x) + \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)}\right] dx \qquad = -\operatorname{cotg}(x) - \frac{1}{\operatorname{sen}(x)} + C.
\end{aligned}$$

2.5.1 Exercícios: Integração por Partes

Exercício 2.5.1. Mostre que:

a) $I_a = \displaystyle\int x\, \cos(x)\, dx = x \operatorname{sen}(x) + \cos(x) + C.$

b) $I_b = \displaystyle\int \operatorname{arctg}(x)\, dx = x \operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$

c) $I_c = \displaystyle\int e^{2x} \operatorname{sen}(x)\, dx = \frac{-e^{2x}\cos(x) + 2e^{2x}\operatorname{sen}(x)}{5} + C.$

d) $I_d = \displaystyle\int \operatorname{sen}[\ln(x)]\, dx = \frac{1}{2}x \operatorname{sen}(\ln|x|) - \frac{x}{2}\cos(\ln|x|) + C.$

Exercício 2.5.2. Calcule as integrais:

a) $I_a = \displaystyle\int \ln(x)\, dx$ b) $I_b = \displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ c) $I_c = \displaystyle\int \sec^3(x) dx$

Respostas

a) $I_a = x\, \ln|x| - x + C$

b) $I_b = -x^2\sqrt{1-x^2} - 2\dfrac{\sqrt{(1-x^2)^3}}{3} + C$

c) $I_c = \dfrac{1}{2}\sec(x)\text{tg}(x) + \dfrac{1}{2}\ln|\sec(x) + \text{tg}(x)| + C.$

2.6 Lista de Exercícios

1. Calcule as integrais:

a) $I_a = \displaystyle\int \left[\frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}} + \cos(\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x^2}}\right] dx$

b) $I_b = \displaystyle\int \left[\frac{x^2\text{arctg}(x^3)}{1+x^6} - \frac{3x}{\sqrt{x^4+2}}\right] dx$

c) $I_c = \displaystyle\int \left\{\frac{x^3-2x}{\sqrt{5-x^4}} + \left[\frac{\sec(3x)}{1-\text{tg}(3x)}\right]^2\right\} dx$

d) $I_d = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$

e) $I_e = \displaystyle\int \frac{x}{x^2-2x+5} dx$

f) $I_f = \displaystyle\int \frac{2x-7}{\sqrt{3-6x-9x^2}} dx$

g) $I_g = \displaystyle\int \frac{4x^3+2x^2+1}{4x^3-x} dx$

h) $I_h = \displaystyle\int \frac{dx}{x^3+x^2+x}$

i) $I_i = \displaystyle\int \frac{dx}{x-\sqrt[3]{x^4}}$

j) $I_j = \displaystyle\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}} dx$

k) $I_k = \displaystyle\int x\text{cosec}^2(x)dx$

l) $I_l = \displaystyle\int e^{ax}\text{sen}(bx)dx, a \neq 0, b \neq 0$

m) $I_m = \displaystyle\int \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) dx.$

Respostas

1.

a) $I_a = 2\sqrt{(1+\sqrt[3]{x})^3} + 3\text{sen}(\sqrt[3]{x}) + C$

b) $I_b = \dfrac{1}{6}[\text{arctg}(x^3)]^2 - \dfrac{3}{2}\ln\left|\sqrt{x^4+2} + x^2\right| + C$

c) $I_c = -\dfrac{1}{2}\sqrt{5-x^4} - \text{arcsen}\dfrac{x^2}{\sqrt{5}} + \dfrac{1}{3[1-\text{tg}(3x)]} + C$

d) $I_d = \text{arcsen}\left(\dfrac{x+2}{3}\right) + C$

e) $I_e = \dfrac{1}{2}\ln|x^2-2x+5| + \dfrac{1}{2}\text{arctg}\left(\dfrac{x-1}{2}\right) + C$

f) $I_f = -\dfrac{2}{9}\sqrt{3-6x-9x^2} - \dfrac{23}{9}\text{arcsen}\left(\dfrac{3x+1}{2}\right) + C$

g) $I_g = x + \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{(2x+1)(2x-1)^2}{x^2}\right| + C$

h) $I_h = -\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x^2+x+1}{x^2}\right| - \dfrac{\sqrt{3}}{3}\text{arctg}\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$

i) $I_i = 3\ln\left|\dfrac{\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[3]{x}}\right| + C$

j) $I_j = \dfrac{3}{8}\sqrt[3]{(1+x)^8} - \dfrac{6}{5}\sqrt[3]{(1+x)^5} + \dfrac{6}{7}\sqrt[6]{(1+x)^7} + \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{(1+x)^2} + C$

k) $I_k = -x\text{cotg}(x) + \ln[\text{sen}(x)] + C$

l) $I_l = \dfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left[a\text{sen}(bx) - b\cos(bx)\right] + C$

m) $I_m = x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \sqrt{1+x^2} + C.$

Capítulo 3

Integral Definida

3.1 Introdução

O conceito de Integral Definida tem muitas aplicações na Geometria (áreas, volumes, comprimento de arcos, etc.), na Física (trabalho, massa, etc.) e em diversas outras áreas. Antes de defini-lo, são necessárias algumas considerações.

Seja uma região R do plano, limitada pelas retas $x = a$ e $x = b$ e a curva que tem a equação $y = f(x)$. Considerando um intervalo fechado $[a, b]$ e um conjunto $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, onde x_i com $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ são valores tais que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Esses valores dividem o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de comprimento $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \ldots, n$, observe a Figura 3.1.

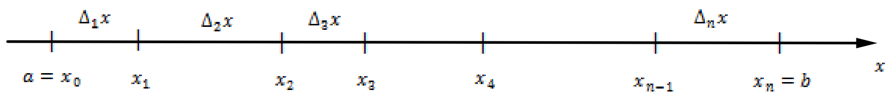


Figura 3.1: Partição do intevale $[a, b]$

O conjunto P é chamado *partição* do intervalo $[a, b]$.

Seja o conjunto $C = \{c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n\}$ onde os elementos de C são tais que $x_0 \leq c_1 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_{n-1} \leq c_n \leq x_n$.

Se f é uma função contínua definida no intervalo fechado $[a, b]$, de acordo com a situação descrita acima, então representando geometricamente obtém-se o gráfico representado na Figura 3.2.

Seja A a medida da área da região R. Para o primeiro retângulo A_1, a

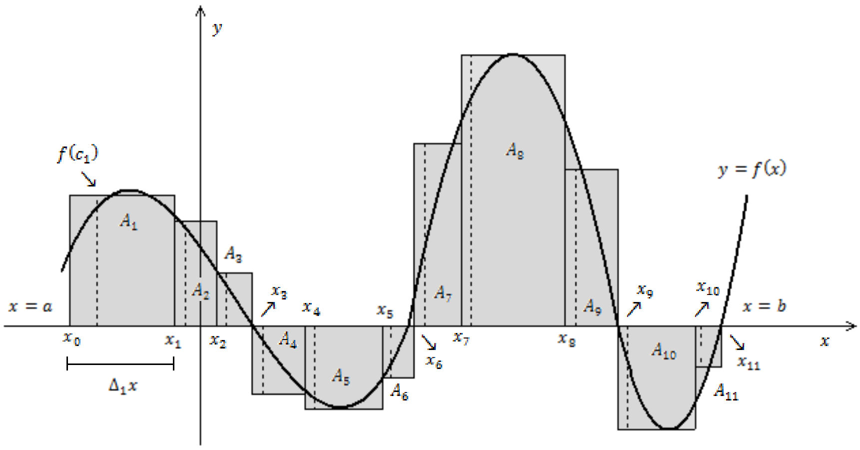


Figura 3.2: Região R limitada pelas retas $x = a$, $x = b$ e pela curva $y = f(x)$

sua área é a medida da base $\Delta_1 x$ multiplicada pela altura $f(c_1)$. Assim, pode-se determinar as áreas de todos os retângulos $A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_n$, observando que se o produto $f(x_i)\Delta_i x$ for negativo, ele representa o oposto da área de um retângulo com largura $\Delta_i x$ que começa no eixo x e estende-se para baixo, até o número negativo $f(x_i)$. Desse modo, a soma $f(c_1)\Delta_1 x + f(c_2)\Delta_2 x + \ldots + f(c_n)\Delta_n x$, indicada por $\sum_{i=1}^{N} f(x_i)\Delta_i x$, é chamada *Soma de Riemann para a função f no intervalo* $[a, b]$.

3.2 Integral Definida

Definição 3.2.1. Seja f uma função real contínua no intervalo $[a, b]$ e $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ uma partição de $[a, b]$, então a integral definida de f de $x = a$ até $x = b$ é dada por:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta_i x, \quad \text{se este limite existir.}$$

Se $\int_a^b f(x)dx$ existe, então $f(x)$ é integrável no intervalo $[a, b]$. Os números a e b são chamados limites de integração, onde a é o limite inferior e b é o limite superior.

Teorema 3.2.1. Se uma função f é contínua em um intervalo $[a, b]$, então f é integrável em $[a, b]$.

3.3 Propriedades

1) Multiplicação por uma constante: Se $f(x)$ é integrável em $[a,b]$ e k é uma constante qualquer, então

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx.$$

2) Soma e Subtração: Se as funções $f(x)$ e $g(x)$ são integráveis em $[a,b]$, então $f(x) \pm g(x)$ é integrável neste intervalo e

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$$

3) Aditividade: Sendo $f(x)$ integrável em $[a,c]$ e $[c,b]$, então $f(x)$ é integrável em $[a,b]$ com $a<c<b$ e

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

4) Integral da função constante: Se k é uma constante e $f(x)=k$, para todo $x \in [a,b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b k\,dx = k(b-a).$$

5) Intervalo de largura zero: Se $f(x)$ está definida em $x=a$, então

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

6) Ordem de integração: Se $f(x)$ é integrável em $[a,b]$, então

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

7) Dominação: Se $f(x)$ e $g(x)$ são funções integráveis no intervalo fechado $[a,b]$ e $f(x) \le g(x)$ para todo x em $[a,b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$$

Caso especial: Para $f(x)$ integrável e não-negativa no intervalo fechado $[a,b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx \ge 0.$$

8) Desigualdade Máximo-Mínimo: Se f é uma função contínua no intervalo $[a,b]$ e m e M são, respectivamente os valores mínimo e máximo absolutos de f em $[a,b]$ tais que $m \le f(x) \le M$ para $a \le x \le b$, então

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

Exemplo 3.3.1. Resolva os itens abaixo.

a) Considere $\int_0^2 x^3\,dx = 4$ e $\int_0^2 x\,dx = 2$, calcule $I_a = \int_0^2 (-3x^3 + 4x + 6)\,dx$.

Solução:

Pela propriedade 2, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} I_a &= \int_0^2 -3x^3\,dx + \int_0^2 4x\,dx + \int_0^2 6\,dx \\ &= -3\int_0^2 x^3\,dx + 4\int_0^2 x\,dx + 6(2-0). \quad \text{(Propriedades 1 e 4)} \end{aligned}$$

Logo,

$$I_a = -3(4) + 4(2) + 12 = 8.$$

b) Calcule $I_b = \int_{-1}^3 f(t)\,dt$, sabendo que $\int_{-1}^2 f(t)\,dt = 8$ e $\int_2^3 f(t)\,dt = -9$.

Solução:

Aplicando a propriedade 3, reescreve-se I_b como:

$$I_b = \int_{-1}^2 f(t)\,dt + \int_2^3 f(t)\,dt.$$

Do enunciado, tem-se:

$$I_b = 8 + (-9) = -1.$$

3.4 Teoremas

Teorema do Valor Extremo

Se f é uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$, então f tem um valor máximo absoluto e um valor mínimo absoluto em $[a, b]$.

Teorema do Valor Intermediário

Se f é uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e se $f(a) \neq f(b)$ então, para qualquer número k entre $f(a)$ e $f(b)$, existe um número c entre a e b tal que $f(c) = k$.

Teorema do Valor Médio para Integrais

Se f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$, então existe um número c em $[a, b]$ tal que:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Demonstração:

Se f for a função constante, c pode ser qualquer ponto do intervalo $[a, b]$. Caso contrário, pelo teorema do valor extremo, pode-se escolher m e M como os valores mínimo e máximo, respectivamente, de f em $[a, b]$. Como $m \leq f(x) \leq M$ para todo x em $[a, b]$, então:

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx \quad \text{(Propriedade 8)}$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \quad \text{(Propriedade 9)}$$

$$m \leq \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)dx \leq M.$$

Finalmente, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe um c no intervalo $[a, b]$ tal que:

$$f(c) = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)dx,$$

ou seja,

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a); \quad a \leq c \leq b.$$

Definição 3.4.1. Se f é integrável no intervalo $[a, b]$, então $f(c)$ é o valor médio de f neste intervalo e é dado por:

$$f(c) = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)dx.$$

Observação 3.4.1. Calcula-se a média de uma sequência finita de valores. Com esta definição pode-se calcular a média para uma variável contínua.

Exemplo 3.4.1. Escreva a integral que calcula o valor médio de $f(x) = 3x^2 - 2x$ no intervalo $[1, 4]$.

Solução:

De acordo com a definição, o valor médio de uma função num determinado intervalo é dado por $f(c) = \dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$. Assim para a função $f(x) = 3x^2 - 2x$, com limites de integração $a = 1$ e $b = 4$,

$$f(c) = \frac{1}{4-1} \int_1^4 (3x^2 - 2x)\, dx.$$

Teorema Fundamental do Cálculo

Basicamente, o Teorema Fundamental do Cálculo mostra que a derivação e a integração são operações inversas, assim como a adição e a subtração ou a multiplicação e a divisão. O teorema divide-se em duas partes. A primeira, trata de derivadas de integrais, mostrando uma forma de construir primitivas e como derivar funções formadas por integrais cujos limites de integração são variáveis. A segunda parte é um dos principais resultados do Cálculo, pois descreve como calcular integrais definidas sem ter que calcular limites de Somas de Riemann, ou seja, mostra como calcular integrais a partir de funções primitivas.

Sob certas hipóteses, um resultado é consequência do outro.

Primeira parte: Se $f(x)$ é uma função contínua sobre $[a, b]$, e se $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ é contínua em $[a, b]$ e derivável no intervalo (a, b), então sua derivada é $f(x)$, ou seja:

$$F'(x) = f(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right].$$

Demonstração:

Aplicando a definição da derivada diretamente à função $F(x)$, quando x e $x + h$ estão em (a, b), mostra-se que seu limite, quando $h \to 0$, é o número $f(x)$ para cada x em (a, b). Sendo assim:

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\int_a^{x} f(t)\,dt + \int_a^{x+h} f(t)\,dt\right] \quad \text{(Propriedade 6)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\int_x^{x+h} f(t)\,dt\right] \quad \text{(Propriedade 3)}.
\end{aligned}$$

Pelo Teorema do Valor Médio para integrais definidas, existe um número c tal que $x \leq c \leq x + h$, então pode-se escrever:

$$\frac{1}{h}\left[\int_x^{x+h} f(t)\,dt\right] = f(c).$$

Quando $h \to 0$, $x + h$ aproxima-se de x, logo c também se aproxima de x. Como f é contínua em x, $\lim_{h\to 0} f(c) = f(x)$.

Portanto,

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\int_x^{x+h} f(t)\,dt\right] = \lim_{h\to 0} f(c) = f(x).$$

Segunda parte: Se $f(x)$ é uma função contínua sobre $[a, b]$ e se $F(x)$ é uma primitiva de f neste intervalo, então:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Demonstração:

A afirmação de que existe uma primitiva de $f(x)$, implica que $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Assim, se F for uma primitiva qualquer de f, então $F(x) = G(x) + C$ para alguma constante C.

Se F e G são contínuas em $[a, b]$, então $F(x) = G(x) + C$ também se aplica quando os extremos de integração forem $x = a$ e $x = b$.

Calculando $F(b) - F(a)$, tem-se:

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= [G(b) + C] - [G(a) + C] \\ &= G(b) - G(a) \\ &= \int_a^b f(t)\,dt - \int_a^a f(t)\,dt \quad \text{(Propriedade 5)} \\ &= \int_a^b f(t)\,dt - 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Observação 3.4.2. Denota-se a diferença $F(b) - F(a)$ pelo símbolo $[F(x)]\Big|_a^b$, ou seja, para efeito do cálculo da integral definida a partir de sua primitiva, tem-se:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Exemplo 3.4.2. Usando o Teorema Fundamental do Cálculo, determine:

a) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x \cos(t)\,dt$

Solução:

Segundo o Teorema Fundamental do Cálculo, tem-se $f(x) = \dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$, logo:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x \cos(t)\,dt = f(x) = \cos(x).$$

b) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$

Solução:

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

c) $\dfrac{dy}{dx}$, se $\quad y = \displaystyle\int_x^5 3t\,\mathrm{sen}(t)\,dt.$

Solução:

Aplica-se a propriedade 6 para obter:

$$y = \int_x^5 3t\,\mathrm{sen}(t)\,dt = -\int_5^x 3t\,\mathrm{sen}(t)\,dt.$$

Do Teorema Fundamental do Cálculo:

$$-\frac{d}{dx}\left(\int_5^x 3t\,\mathrm{sen}(t)\,dt\right) = -f(x) = -3x\,\mathrm{sen}(x).$$

Observação 3.4.3. Funções escritas na forma $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ são encontradas em livros de Química, Física e Estatística. Por exemplo a função integral

$$S(x) = \int_0^x \mathrm{sen}\left(\frac{\pi t^2}{2}\right)\,dt$$

é chamada Função de Fresnel. Recebe este nome, em homenagem ao físico francês Augustin Fresnel (1788-1827), famoso por seus estudos em óptica. Essa função apareceu pela primeira vez na teoria de difração das ondas de luz de Fresnel, porém mais recentemente foi aplicada no planejamento de autoestradas.

Exemplo 3.4.3. Mostre que:

a) $I_a = \displaystyle\int_1^2 2x\,dx = 3$ b) $I_b = \displaystyle\int_{-1}^1 x\,dx = 0$ c) $I_c = \displaystyle\int_{-1}^1 (x^2-1)\,dx = -\frac{4}{3}.$

Solução:

a) $I_a = \displaystyle\int_1^2 2x\,dx = 3.$

Do Teorema Fundamental do Cálculo, tem-se $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, onde F é uma primitiva de f. Sendo $f(x) = 2x$, uma primitiva de f é a função $F(x) = x^2$, logo:

$$\int_1^2 2x\,dx = F(2) - F(1) = [x^2]\Big|_1^2 = (2)^2 - (1)^2.$$

Portanto,

$$I_a = \int_1^2 2x\,dx = 3.$$

b) $I_b = \int_{-1}^{1} x\,dx = 0.$

Dado $f(x) = x$, uma primitiva de f é a função $F(x) = \dfrac{x^2}{2}$ e pelo Teorema Fundamental do Cálculo:

$$\int_{-1}^{1} x\,dx = F(1) - F(-1) = \left[\frac{x^2}{2}\right]\Big|_{-1}^{1} = \left(\frac{(1)^2}{2}\right) - \left(\frac{(-1)^2}{2}\right).$$

Logo,

$$I_b = \int_{-1}^{1} x\,dx = 0.$$

c) $I_c = \int_{-1}^{1} (x^2 - 1)\,dx = -\dfrac{4}{3}.$

Fazendo $f(x) = x^2 - 1$ e sua primitiva $F(x) = \dfrac{x^3}{3} - x$, do Teorema Fundamental do Cálculo, tem-se:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} (x^2 - 1)\,dx = F(1) - F(-1) &= \left[\frac{x^3}{3} - x\right]\Bigg|_{-1}^{1} \\ &= \left[\frac{(1)^3}{3} - 1\right] - \left[\frac{(-1)^3}{3} - (-1)\right].\end{aligned}$$

Assim,

$$I_c = \int_{-1}^{1} (x^2 - 1)\,dx = -\frac{4}{3}.$$

3.5 Integração de funções pares e ímpares

Geometricamente, uma função ímpar é simétrica em relação à origem e uma função par é simétrica em relação ao eixo y para valores de x dentro de um intervalo simétrico. Por exemplo, veja as Figuras 3.3 e 3.4 onde estão representadas a função par $y = x^2$ e a função ímpar $y = x^3$.

O cálculo de integrais definidas pode ser simplificado no caso de funções pares e ímpares.

Seja f integrável no intervalo fechado $[-a, a]$. Portanto,

a) Se f é uma função par, então $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$

Demonstração:

Pela Propriedade 3 tem-se

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx. \tag{3.5.1}$$

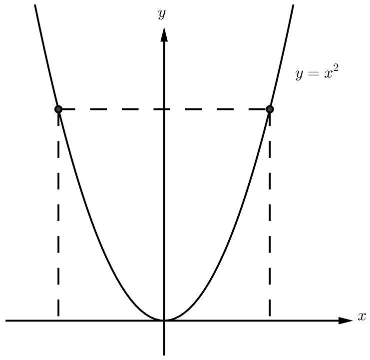


Figura 3.3: Função Par: $y = x^2$

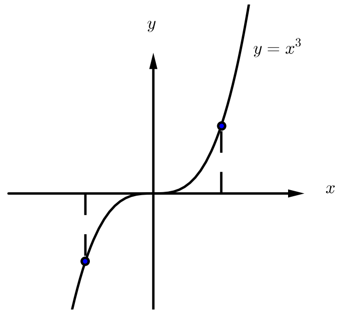


Figura 3.4: Função Ímpar: $y = x^3$

Como a função f é par, então $f(x) = f(-x)$. Fazendo-se a substituição $u = -x$ na primeira integral do segundo membro, obtém-se:

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{a}^{0} f(-u)(-du) = -\int_{a}^{0} f(-u)du = \int_{0}^{a} f(u)\,du = \int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Reescrevendo em (3.5.1):

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx &= \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)dx \\ &= 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.\end{aligned}$$

b) Se f é uma função ímpar, então $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

Demonstração:

Aplicando novamente a Propriedade 3, escreve-se:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx \tag{3.5.2}$$

A função f é ímpar, logo $f(-x) = -f(x)$. Na primeira integral do segundo membro, faz-se a substituição $u = -x$ para obter:

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{a}^{0} f(-u)(-du) = -\int_{0}^{a} f(u)\,du = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Reescreve-se a equação (3.5.2):

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx &= -\int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)dx\\ &= 0.\end{aligned}$$

Exemplo 3.5.1. Calcule:

a) $I_a = \displaystyle\int_{-2}^{2} (x^5 - 4x^3 + 6x)\,dx$ b) $I_b = \displaystyle\int_{-1}^{1} (x^4 + 3x^2)\,dx.$

Solução:

a) $I_a = \displaystyle\int_{-2}^{2} (x^5 - 4x^3 + 6x)\,dx.$

Verifica-se que a função $f(x) = x^5 - 4x^3 + 6x$ é ímpar, pois:

$$f(-x) = (-x)^5 - 4(-x)^3 + 6(-x) = -x^5 + 4x^3 - 6x = -f(x).$$

Logo, pela definição de integração de funções ímpares, tem-se:

$$I_a = \int_{-2}^{2} (x^5 - 4x^3 + 6x)\,dx = 0.$$

b) $I_b = \displaystyle\int_{-1}^{1} (x^4 + 3x^2)\,dx.$

A função $f(x) = x^4 + 3x^2$ é par, pois:

$$f(-x) = (-x)^4 + 3(-x)^2 = x^4 + 3x^2 = f(x).$$

Portanto, para calcular sua integral escreve-se:

$$\int_{-1}^{1} (x^4 + 3x^2)\,dx = 2\int_{0}^{1} (x^4 + 3x^2)\,dx.$$

Uma primitiva de $f(x)$ é a função $F(x) = \dfrac{x^5}{5} + x^3$, assim, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, tem-se:

$$\begin{aligned}2\int_{0}^{1} (x^4 + 3x^2)\,dx &= 2\left[\frac{x^5}{5} + x^3\right]\Big|_0^1\\ &= 2\left[\frac{(1)^5}{5} + (1)^3\right] + 0.\end{aligned}$$

Logo,

$$I_b = \int_{-1}^{1} (x^4 + 3x^2)\,dx = \frac{12}{5}.$$

3.6 O Cálculo de Integrais Definidas por Substituição

A integral indefinida dada por $\displaystyle\int f(x)dx$ é uma primitiva de f, se f for contínua. Sendo assim pode-se expressar o Teorema Fundamental do Cálculo na forma:

$$\int_a^b f(x)dx = \left[\int f(x)dx\right]\Big|_a^b. \tag{3.6.1}$$

Esse resultado é útil quando se tem integrais de funções cujas primitivas não são facilmente encontradas.

Algumas integrais definidas, para serem resolvidas necessitam de substituição da variável de integração. Por consequência, tem efeito sobre os limites de integração. Existem dois métodos para esse cálculo:

Primeiro Método: Primeiro determina-se a integral indefinida por substituição, e então usa-se a relação (3.6.1) para calcular a integral definida. Com esse método não é necessária nenhuma mudança nos limites de integração.

Exemplo 3.6.1. Calcule $I_a = \displaystyle\int_0^1 (2x^3+1)^3\, x^2\, dx$.

Solução:

Resolve-se a integral indefinida $\displaystyle\int (2x^3+1)^3 x^2\, dx$ com a substituição $u = 2x^3+1$ e $du = 6x^2dx$.

Reescrevendo na variável u, tem-se:

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{6}\int u^3\, du \\ &= \frac{1}{6}\frac{u^4}{4} + C \\ &= \frac{u^4}{24} + C. \end{aligned}$$

Usando a relação (3.6.1) e retornando à variável x, obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (2x^3+1)^3\, x^2\, dx &= \left[\int (2x^3+1)^3 x^2\, dx\right]\Big|_0^1 \\ &= \left[\frac{(2x^3+1)^4}{24}\right]\Big|_0^1 \quad \text{(Teorema Fundamental do Cálculo)} \\ &= \frac{(2(1)^3+1)^4}{24} - \frac{(2(0)^3+1)^4}{24}. \end{aligned}$$

Assim, o resultado da integral definida é:

$$I_a = \frac{3^4}{24} - \frac{1}{24} = \frac{10}{3}.$$

Segundo Método: Na integral definida se faz a substituição necessária e, então, usa-se a relação $u = g(x)$ para substituir os limites de integração em x, ou seja,

$$\begin{aligned} x = a &\longrightarrow u = g(a) \\ x = b &\longrightarrow u = g(b) \end{aligned} \tag{3.6.2}$$

Esse método produz uma nova integral definida expressa em termos da variável u, dada por:

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du.$$

Exemplo 3.6.2. Calcule:

a) $I_a = \displaystyle\int_2^{10} \frac{3}{\sqrt{5x-1}}\, dx.$

Solução:

Fazendo a substituição diretamente na integral definida, onde $u = 5x - 1$ e $du = 5dx$. É necessário mudar os limites de integração usando a relação (3.6.2):

$$\begin{aligned} x = 2 &\longrightarrow u = g(2) \longrightarrow u = 5(2) - 1 = 9 \\ x = 10 &\longrightarrow u = g(10) \longrightarrow u = 5(10) - 1 = 49. \end{aligned}$$

Reescreve-se a integral definida em termos da variável u:

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{3}{5}\int_9^{49} \frac{du}{\sqrt{u}} \\ &= \frac{3}{5}\int_9^{49} u^{-\frac{1}{2}}\, du \\ &= \left[\frac{3}{5}\, 2u^{\frac{1}{2}}\right]\Bigg|_9^{49} \quad \text{(Teorema Fundamental do Cálculo)} \\ &= \frac{6}{5}(49^{\frac{1}{2}} - 9^{\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

Logo, $I_a = \dfrac{24}{5}$.

b) $\dfrac{dy}{dx}$, se $\quad y = \displaystyle\int_1^{x^2} \cos(t)\,dt.$

Solução:

Primeiramente se faz uma mudança de variável no limite superior de integração, onde $u = x^2$ e $du = 2x\,dx$. Com essa mudança se faz necessário aplicar a regra da cadeia:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx}\\
&= \frac{d}{dx}\left(\int_1^{u} \cos(t)\,dt\right)2x\\
&= \cos(u)2x. \quad \text{(Teorema Fundamental do Cálculo)}
\end{aligned}$$

Retornando à variável original x, tem-se:

$$\frac{d}{dx}\int_1^{x^2} \cos(t)\,dt = f(x) = 2x\,\cos(x^2).$$

3.6.1 Exercícios: Integrais Definidas

Exercício 3.6.1. Determine o valor médio de cada função no respectivo intervalo dado:

a) $f(x) = x^2 + 5, \quad [0, 1]$

b) $f(x) = (x-2)(x+3), \quad [-3, 2].$

Exercício 3.6.2. Mostre que:

a) $I_a = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(x)\,dx = 1$

b) $I_b = \displaystyle\int_{-2}^{0} 3y\sqrt{4-y^2}\,dy = -8$

c) $I_c = \displaystyle\int_1^{2} \ln(x)\,dx = 2\,\ln(2) - 1$

d) $I_d = \displaystyle\int_1^{2} \frac{x^3+2x^2+x+2}{(x+1)^2}\,dx = \frac{11}{6}$

e) $I_e = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{6}} \frac{x^{\frac{1}{4}}}{1+x^{\frac{1}{2}}}\,dx = -\frac{2}{3}\sqrt[4]{216} + 4\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{6}}\right) + \frac{2}{9}\sqrt[4]{6}$

f) $I_f = \displaystyle\int_{-3}^{4} |x+2|\,dx = \frac{37}{2}.$

Exercício 3.6.3. Determine:

a) $\dfrac{dy}{dx}$, $\quad$ se $\quad y = \displaystyle\int_{1+3x^2}^{4} \frac{dt}{2+e^t}$

b) $\dfrac{dy}{dx}$, se $y = \displaystyle\int_1^{x^2} \sqrt{1+t^4}dt.$

Exercício 3.6.4. Utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo, calcule:

a) $I_a = \displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{2x-1}$

b) $I_b = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x+1}\, dx$

c) $I_c = \displaystyle\int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x}\, dx$

d) $I_d = \displaystyle\int_0^1 xe^{2x}\, dx$

e) $I_e = \displaystyle\int_1^4 \left[x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}} + 1\right] dx$

f) $I_g = \displaystyle\int_0^2 (2x - 3x^2 + x^3)\, dx$

g) $I_h = \displaystyle\int_0^1 (2x+3)^2\, dx$

h) $I_i = \displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} (x^5 - 4x^3 + 2x)\, dx$

i) $I_j = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\cos(x)dx$

j) $I_k = \displaystyle\int_1^e \frac{dt}{t}$

k) $I_l = \displaystyle\int_0^1 e^y\, dy$

l) $I_m = \displaystyle\int_{-2}^2 \frac{dy}{y^2+4}$

m) $I_n = \displaystyle\int_2^4 (3t^2 - 6t + 1)\, dt$

n) $I_o = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \operatorname{sen}(x)\, dx$

o) $I_p = \displaystyle\int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{1+t}}.$

Respostas

3.6.1

a) $f(c) = \dfrac{16}{3}$ b) $f(c) = -\dfrac{25}{6}$

3.6.3

a) $\dfrac{6x}{1+e^{1+3x^2}}$ b) $2x\sqrt{1+x^8}$

3.6.4

a) $I_a = \dfrac{\ln(3)}{2}$ b) $I_b = 1 - \ln(2)$ c) $I_c = 4 - 2\operatorname{arctg}(2)$

d) $I_d = \dfrac{e^2+1}{4}$ e) $I_e = 23$ f) $I_g = -8$

g) $I_h = \dfrac{49}{3}$ h) $I_i = -\dfrac{5}{6}$ i) $I_j = 1$

j) $I_k = 1$ k) $I_l = e - 1$ l) $I_m = \dfrac{\pi}{4}$

m) $I_n = 22$ n) $I_o = 1$ o) $I_p = 2.$

3.7 Aplicações da Integral Definida

3.7.1 Cálculo de Áreas

Quando uma função $f(x)$ é contínua e não negativa em $[a,b]$, a definição de Integral Definida coincide com a definição de área. Portanto, $\int_a^b f(x)dx$ representa a área da região S sob o gráfico de $f(x)$ acima do eixo x de a até b, que está representada na Figura 3.5.

Intuitivamente a integral de $f(x)$ pode ser entendida como a soma de pequenos retângulos verticais de base dx e altura $f(x)$, onde o produto $f(x)dx$ é a área deste retângulo. A soma de todas estas pequenas áreas fornece a área total abaixo da curva e acima do eixo x. Pode-se dizer, mais precisamente que,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N} f(x_i)\Delta_i x \quad \text{onde,}$$

- $\Delta_i x = \dfrac{b-a}{N}$ é o comprimento dos pequenos intervalos nos quais $[a,b]$ foi dividido;

- $f(x_i)$ é o valor da função no ponto x_i, ou seja, a altura de cada um dos retângulos. A escolha do ponto x_i é aleatória, pode-se escolher qualquer ponto do intervalo $[x_i, x_{i+1}]$;

- N é o número de pontos da partição P do intervalo $[a,b]$.

Quando N for muito grande o valor da soma acima aproxima-se do valor da área abaixo da curva e acima do eixo x, e portanto, da integral de $f(x)$ no intervalo.

Na Figura 3.5, considere a faixa de largura $dx = \Delta x = \dfrac{b-a}{N}$:

Aproxima-se a área da faixa pela área do retângulo, cuja base é $\Delta x = dx$ e altura $f(x_i)$, observe a Figura 3.6.

A área deste retângulo é dada por $A_i = f(x_i)dx$, pois dx é a medida da base e $f(x_i)$ é a altura do retângulo.

A área da região S é, aproximadamente, a soma das áreas de todos os retângulos, isto é,

$$A(S) \approx \sum_{i=1}^{N} f(x_i)dx.$$

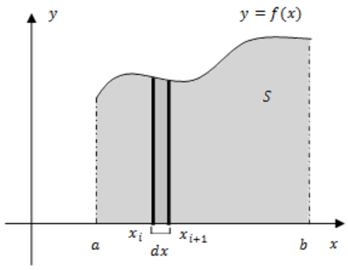


Figura 3.5: Área da região S

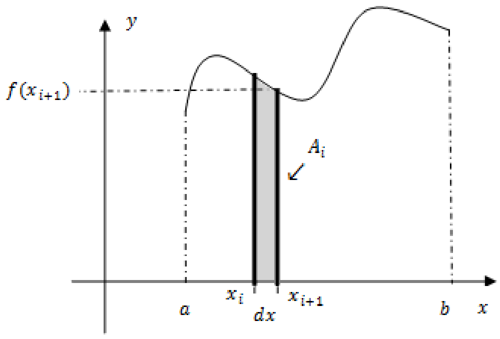


Figura 3.6: Área A_i

Quanto maior o número de pontos da partição P, temos um valor mais próximo do valor real da área de S, isto é

$$A(S) = \lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\, dx = \int_a^b f(x) dx,$$

onde a segunda igualdade segue diretamente da definição de integral.

Notação: $A = \int dA = \int_a^b f(x)\, dx.$

Pode-se calcular a área de duas formas:

Primeira) Quando a área em questão é limitada pelas retas $x = a$, $x = b$ e ainda:

i) pelas curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ (Figura 3.7).

Tem-se:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx.$$

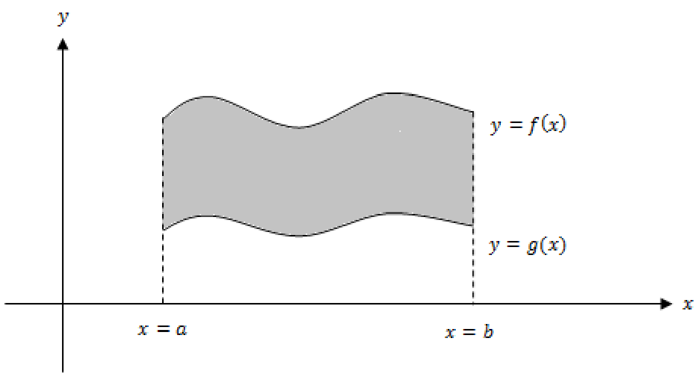


Figura 3.7: Região limitada por $x = a$ e $x = b$ e tal que $f(x) \geq g(x)$

ii) pela curva $y = f(x)$ e pela reta $y = 0$ (eixo x) (Figura 3.8).

Tem-se:

$$A = \int_a^b [f(x) - 0]dx.$$

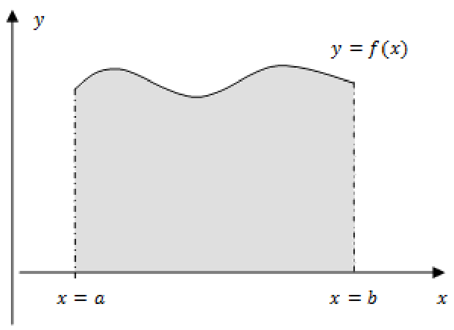


Figura 3.8: Região limitada por $x = a$ e $x = b$ e tal que $f(x) \geq 0$

Observação 3.7.1. Se $g(x) \geq f(x)$ em (i), obtém-se:

$$A = \int_a^b [g(x) - f(x)]\, dx. \quad \text{(Figura 3.9)}$$

Além disso, se $f(x) \leq 0$ em (ii), obtém-se:

$$A = \int_a^b [0 - f(x)]\, dx. \quad \text{(Figura 3.10)}$$

Segunda) Quando a área em questão é limitada pelas retas $y = c$, $y = d$ e ainda:

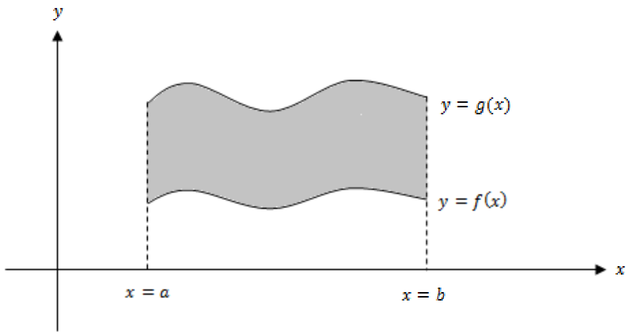


Figura 3.9: Região limitada por $x = a$ e $x = b$ e tal que $g(x) \geq f(x)$

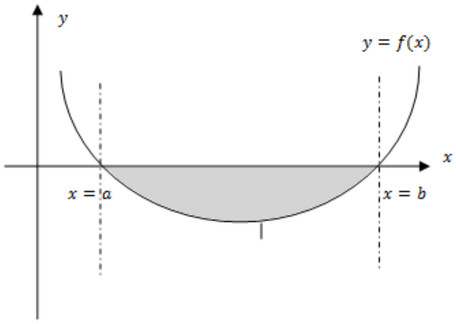


Figura 3.10: Região limitada por $x = a$ e $x = b$ e tal que $f(x) \leq 0$

i) pelas curvas $x = f(y)$ e $x = g(y)$ (Figura 3.11).

Tem-se:

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]dy.$$

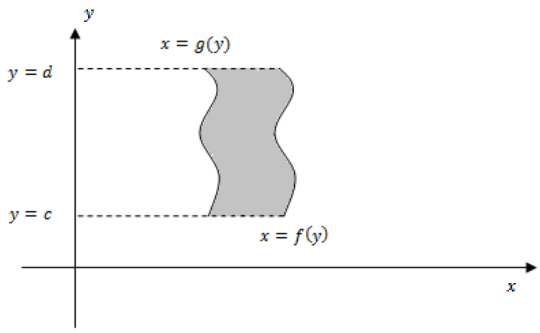


Figura 3.11: Região limitada por $y = c$ e $y = d$ e tal que $f(y) \geq g(y)$

ii) pela curva $x = f(y)$ e pela reta $x = 0$ (eixo y) (Figura 3.12).

Tem-se:

$$A = \int_c^d [f(y) - 0]dy.$$

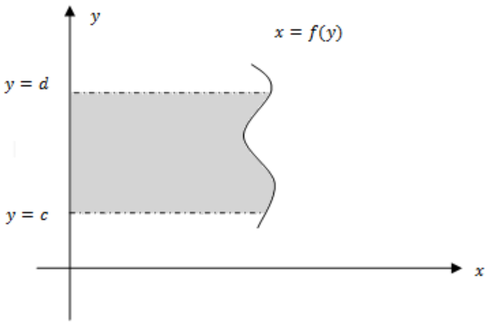


Figura 3.12: Região limitada por $y = c$ e $y = d$ e tal que $f(y) \geq 0$

Observação 3.7.2. Se $g(y) \geq f(y)$ em (i), obtém-se $A = \displaystyle\int_c^d [g(y) - f(y)]\, dy$ (Figura 3.13).

Além disso, se $f(y) \leq 0$ em (ii), obtém-se $A = \displaystyle\int_c^d [0 - f(y)]\, dy$ (Figura 3.14).

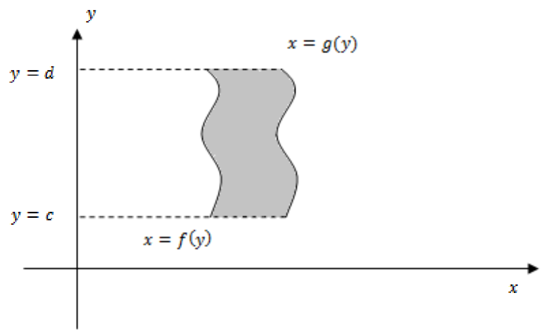


Figura 3.13: Região limitada por $y = c$ e $y = d$ e tal que $g(y) \geq f(y)$

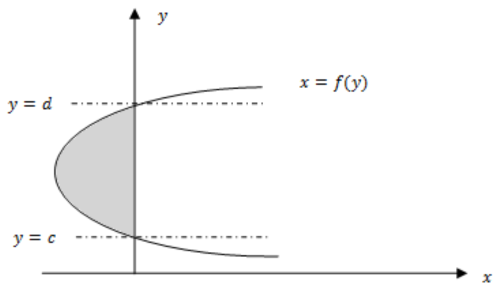


Figura 3.14: Região limitada por $y = c$ e $y = d$ e tal que $f(y) \leq 0$

Exemplo 3.7.1. Calcule a área da região A limitada pela curva $y = x^2$, o eixo x e as retas $x = 1$ e $x = 4$.

Solução:

Fazendo o esboço do gráfico (Figura 3.15), utilizando retângulos verticais para descrever a área A, tem-se:

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(x) - 0]\, dx &= \int_1^4 x^2\, dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3}\right]\Big|_1^4 \\ &= \frac{4^3}{3} - \frac{1^3}{3}. \end{aligned}$$

Logo, a área da região é:

$$A = 21\, u.a.$$

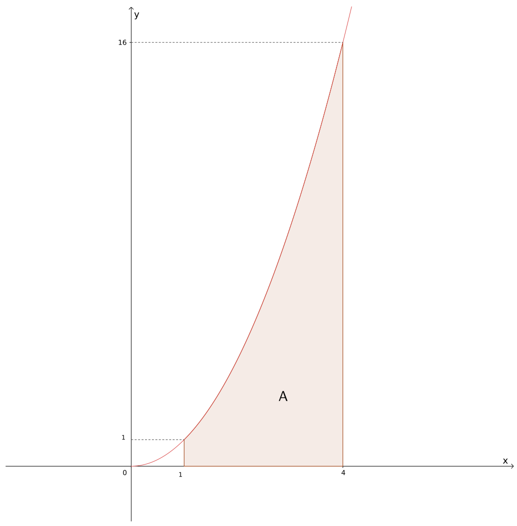


Figura 3.15: Exemplo 3.7.1

Considerando retângulos horizontais para descrever a área da região A, tem-se a soma de duas áreas:

$$\begin{aligned} A &= \int_1^{16} (4 - \sqrt{y})dy + \int_0^1 3\, dy \\ A &= \left[4y - \frac{2}{3}\sqrt{3}\right]\Big|_1^{16} + 3y\Big|_0^1 \\ A &= 21\, u.a. \end{aligned}$$

Exemplo 3.7.2. Determine a área da região A limitada pelas curvas $y = 6x - x^2$ e $y = x^2 - 2x$.

Solução:

Pelo esboço do gráfico (Figura 3.16), os pontos de intersecção das curvas são $(4,8)$ e $(0,0)$, logo os limites de integração são $x=0$ e $x=4$.

Sejam $f(x) = 6x - x^2$ e $g(x) = x^2 - 2x$, tem-se:

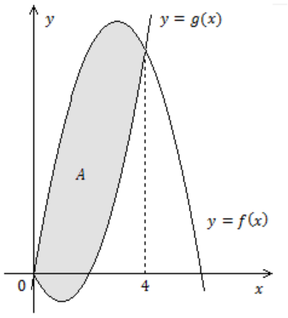


Figura 3.16: Exemplo 3.7.2

$$\begin{aligned}
A &= \int_a^b [f(x) - g(x)]dx \\
&= \int_0^2 [f(x) - 0]dx + \int_0^2 [0 - g(x)]dx + \int_2^4 [f(x) - g(x)]dx \\
&= \int_0^2 (6x - x^2)dx + \int_0^2 [0 - (x^2 - 2x)]dx + \int_2^4 [(6x - x^2) - (x^2 - 2x)]dx \\
&= \int_0^2 [(6x - x^2) - (x^2 - 2x)]dx + \int_2^4 [(6x - x^2) - (x^2 - 2x)]dx \\
&= \int_0^4 [(6x - x^2) - (x^2 - 2x)]dx \\
&= \int_0^4 \left[-2x^2 + 8x\right] dx \\
&= \left[-\frac{2x^3}{3} + 4x^2\right] \Big|_0^4 \\
&= -\frac{2.4^3}{3} + 4.4^2.
\end{aligned}$$

Logo, a área da região é:

$$A = \frac{64}{3}\, u.a.$$

Exemplo 3.7.3. Determine a área da região limitada pelas curvas $y - x = 6$, $y - x^3 = 0$ e $2y + x = 0$.

Solução:

Divide-se a região em duas partes A_1 e A_2, conforme o esboço do gráfico na Figura 3.17. Sejam $f_1(x) = x + 6$, $f_2(x) = x^3$ e $f_3(x) = -\dfrac{x}{2}$, e as áreas A_1 e A_2, tem-se:

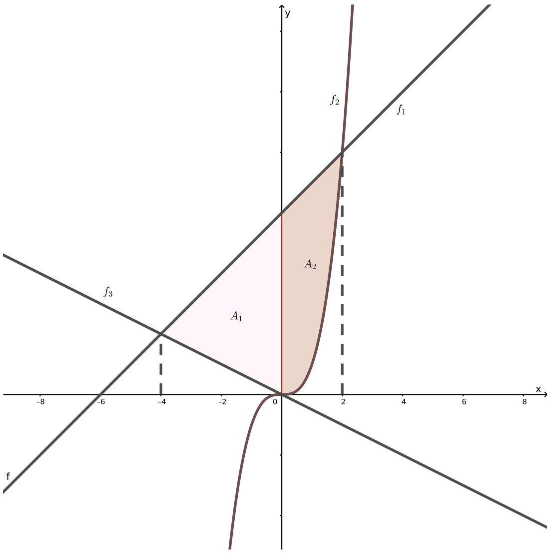


Figura 3.17: Exemplo 3.7.3

$$A = A_1 + A_2 = \int_a^b [f_1(x) - f_3(x)]\, dx + \int_b^c [f_1(x) - f_2(x)]\, dx.$$

Para determinar os limites de integração, calculam-se as intersecções entre as curvas. Assim, tem-se $a = -4$, $b = 0$, $c = 2$ e escreve-se

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= \int_{-4}^{0} [(x+6) + \frac{x}{2}]\, dx + \int_0^2 [(x+6) - x^3]\, dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} + 6x + \frac{x^2}{4}\right]\Big|_{-4}^{0} + \left[\frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^4}{4}\right]\Big|_0^2 \\ &= -\left[\frac{(-4)^2}{2} + 6(-4) + \frac{(-4)^2}{4}\right] + \frac{2^2}{2} + 6(2) - \frac{2^4}{4}. \end{aligned}$$

Logo, a área da região é:

$$A = 22\, u.a.$$

Exemplo 3.7.4. De duas formas, determine a área da:

a) região limitada pela curva $y = 4x - x^2$, a reta $y = x$ e o eixo x;

b) região limitada por $y = \sqrt{x}$, a reta $y = x - 2$ e abaixo pelo eixo x.

Solução:

a) Considerando retângulos horizontais para descrever a área da região delimitada segundo as instruções do enunciado, tem-se a área da região solicitada como solução a soma das áreas A_1 e A_2, observe a Figura 3.18. Os limites de integração de A_1 e A_2 são, respectivamente, $0 \leq x \leq 3$ e $3 \leq x \leq 4$:

$$
\begin{aligned}
A &= A_1 + A_2 \\
&= \int_0^3 x\,dx + \int_3^4 (4x - x^2)\,dx \\
&= \left[\frac{x^2}{2}\right]\Big|_0^3 + \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]\Big|_3^4 \\
&= \frac{9}{2} + \left[2.(4)^2 - \frac{4^3}{3} - (2.(3)^2) - \frac{3^3}{3})\right].
\end{aligned}
$$

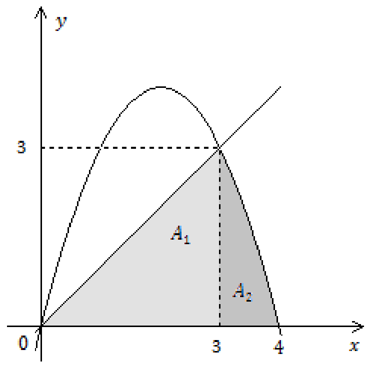


Figura 3.18: Exemplo 3.7.4 a

Assim, a área total da região é:

$$A = \frac{37}{6}\,u.a.$$

Outra forma de solução consiste em considerar retângulos verticais para aproximar a área. Nesse caso, pode-se calcular a área diretamente, considerando as funções dadas escritas em termos de y, bem como os limites de integração no eixo y, isto é $0 \leq y \leq 3$.

Para determinar a função em y, deve-se calcular a inversa completando o quadrado em $y = 4x - x^2$:

$$
\begin{aligned}
y &= 4x - x^2 + 4 - 4 \\
y &= -(2 - x)^2 + 4
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$(2 - x)^2 = 4 - y,$$

ou seja,

$$x = \pm\sqrt{4 - y} + 2.$$

Assim, para o intervalo $0 < y < 3$, considera-se $x = 2 + \sqrt{4 - y}$, então

$$
\begin{aligned}
A &= \int_c^d [f(y) - g(y)]\,dy \\
&= \int_0^3 [+\sqrt{4 - y} + 2 - y]\,dy \\
&= \left[-\frac{2(4 - y)^{\frac{3}{2}}}{3} + 2y - \frac{y^2}{2}\right]\Big|_0^3
\end{aligned}
$$

Dessa forma,

$$A = \frac{37}{6}\,u.a.$$

b) Escolhendo retângulos verticais para determinar o valor da área, tem-se a soma das áreas A_1 e A_2 (Figura 3.19):

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 \\ &= \int_0^2 \sqrt{x}\,dx + \int_2^4 [\sqrt{x} - (x-2)]\,dx \\ &= \left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\right]\Big|_0^2 + \left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]\Big|_2^4 \\ &= \frac{2\sqrt{8}}{3} + \left[\frac{16}{3} - 8 + 8 - \left(\frac{2\sqrt{8}}{3} - 2 + 4\right)\right]. \end{aligned}$$

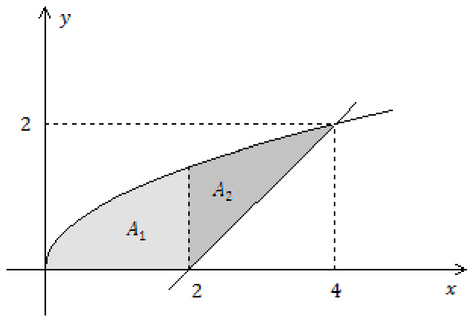


Figura 3.19: Exemplo 3.7.4 b

Assim, a área total da região é:

$$A = \frac{10}{3}\,u.a.$$

Considerando retângulos horizontais, a região solicitada fica delimitada como $0 \leq y \leq 2$ e $y^2 \leq x \leq y+2$ e a área da região pode ser calculada como

$$\begin{aligned} A &= \int_c^d [f(y) - g(y)]\,dy \\ &= \int_0^2 [(y+2) - y^2]\,dy \\ &= \left[\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3}\right]\Big|_0^2 \end{aligned}$$

Logo, a área total é

$$A = \frac{10}{3}\,u.a.$$

Observação 3.7.3. Os exemplos acima mostram que os cálculos podem ser simplificados dependendo do elemento de área escolhido.

3.7.2 Exercícios: Cálculo de Áreas

Exercício 3.7.1. Determine a área limitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = 2$, usando elemento de área dy e elemento de área dx. R: $\dfrac{8\sqrt{2}}{3}u.a.$

Exercício 3.7.2. Calcule a área limitada pela parábola $y^2 = 2x-2$ e a reta $y = x-5$. R: $18u.a.$

Exercício 3.7.3. Calcule, por integração, a área da região limitada pelas curvas:

a) $y = x^2, \quad y = \dfrac{x^2}{2}, \quad \text{e} \quad y = 2x$

b) $y = e^{-x}, \quad y = x + 1, \quad \text{e} \quad x = -1$

c) $y = 5 - x^2, \quad \text{e} \quad y = x + 3$

d) $y = -x^2, \quad \text{e} \quad y = -4$

e) $y = e^x, \quad x = 0, \quad x = 1 \quad \text{e} \quad y = 0$

f) $y = 3 - x, \quad \text{e} \quad y = 3 - x^2$

g) $x = y^2, \quad \text{e} \quad y = -\dfrac{x}{2}$

h) $y = x^3, \quad y = -x^3, \quad \text{e} \quad y = -1.$

Respostas

3.7.3

a) $4u.a.$ b) $\left(e - \dfrac{3}{2}\right) u.a.$

c) $\dfrac{9}{2}u.a.$ d) $\dfrac{32}{3}u.a.$ e) $(e-1)u.a.$

f) $\dfrac{1}{6}u.a.$ g) $\dfrac{4}{3}u.a.$ h) $\dfrac{3}{2}u.a.$

3.7.3 Cálculo de Volumes

Um sólido de revolução é um sólido gerado pela rotação de uma região plana em torno de uma reta pertencente ao mesmo plano da região. Esta reta é denominada eixo de revolução.

A definição do volume de um sólido de revolução é feita de forma análoga à definição de área.

Interceptando o sólido na Figura 3.21 por um plano perpendicular ao eixo x no ponto x_i, obtém-se uma seção transversal circular. O raio do círculo é $f(x_i)$ e, portanto, sua área é $\pi[f(x_i)]^2$.

Seja f uma função contínua e não-negativa no intervalo $[a, b]$ e $\sum_{i=1}^{N} f(x_i)dx$ a soma das áreas dos retângulos representados na Figura 3.20. Assim, o sólido gerado pelo polígono formado por esses retângulos resulta na Figura 3.21.

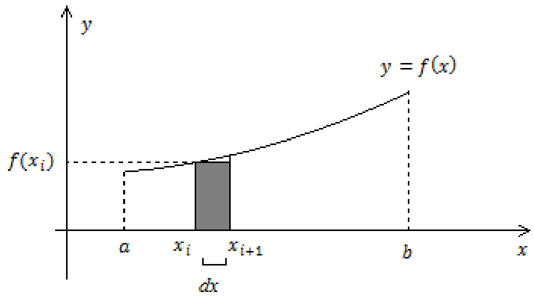


Figura 3.20: Região Plana

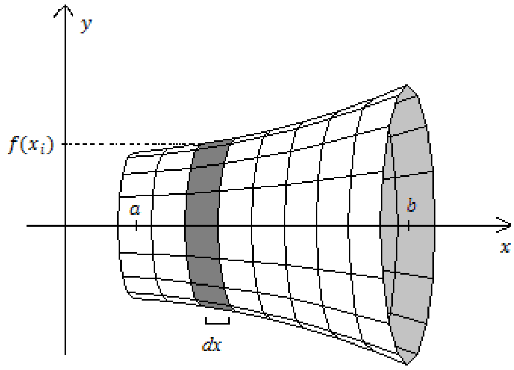


Figura 3.21: Sólido de revolução

O retângulo em destaque gera um disco circular ou cilindro circular reto, cujo raio da base é $f(x_i)$ e altura dx. Assim, o volume desse disco é aproximadamente $V_i = \pi[f(x_i)]^2dx$, pois o raio da base superior é $f(x_{i+1})$ que é maior do que $f(x_i)$. A soma de todos os volumes de cada um desses discos na Figura 3.21 é o volume do sólido e pode ser escrita como:

$$V \approx \sum_{i=1}^{N} \pi[f(x_i)]^2dx.$$

Quanto maior o número de pontos na partição P, tem-se um valor mais próximo do valor do volume do sólido gerado, isto é,

$$V = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \pi[f(x_i)]^2dx = \int_a^b \pi[f(x_i)]^2dx.$$

Definição 3.7.1. Seja f uma função contínua e não-negativa em $[a, b]$, o volume V do sólido de revolução em torno do eixo x, gerado pela rotação da região limitada por $f(x)$, pelas retas $x = a$, $x = b$ e $y = 0$ (eixo x), é representado por:

$$V = \int dV = \int_a^b \pi[f(x)]^2dx. \tag{3.7.1}$$

Observação 3.7.4. Analogamente, se a região é formada pela função $x = f(y)$, limitada pelas retas $y = c$, $y = d$ e $x = 0$ (eixo y), então o volume do sólido de revolução em torno do eixo y é escrito como:

$$V = \int dV = \int_c^d \pi[f(y)]^2dy. \tag{3.7.2}$$

Exemplo 3.7.5. Determine:

a) o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da região limitada pela curva $y = \sqrt{x}$ e as retas $x = 4$ e $y = 0$ em torno do eixo x.

Solução:

A região limitada pela curva $y = \sqrt{x}$ e as retas $x = 4$ e $y = 0$ é mostrada na Figura 3.22.

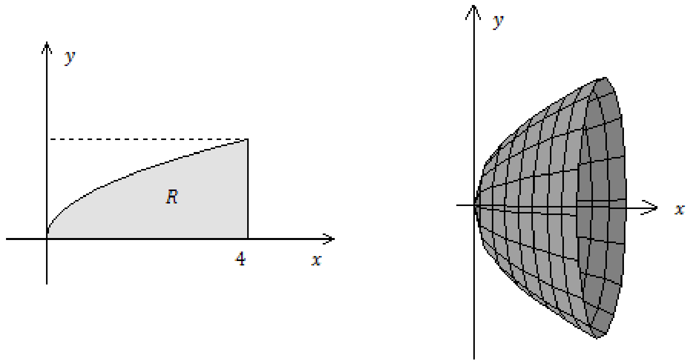


Figura 3.22: Exemplo 3.7.5 a

Para o cálculo do volume do sólido de revolução, utiliza-se a definição 3.7.1 e aplica-se (3.7.1):

$$\begin{aligned} V &= \int dV = \int_a^b \pi[f(x)]^2\,dx \\ &= \int_0^4 \pi[\sqrt{x}]^2\,dx \\ &= \pi\left[\frac{x^2}{4}\right]\Big|_0^4. \end{aligned}$$

Assim, o volume do sólido de revolução em torno do eixo x mostrado na figura é:

$$V = 8\pi\, u.v.$$

b) o volume do sólido gerado pela rotação em torno do eixo x da região limitada pelas curvas $x^2 = y - 2$ e $2y - x - 2 = 0$ e pelas retas $x = 0$ e $x = 1$.

Solução:

O cálculo do volume do sólido de revolução descrito na Figura 3.23 é calculado pela diferença entre o volume do sólido exterior (gerado pela função $f(x) =$

$x^2+2)$ e o volume do sólido interior $\left(\text{gerado por } g(x) = \dfrac{x+2}{2}\right)$:

$$
\begin{aligned}
V &= \int_a^b \pi[f(x)]^2\,dx - \int_a^b \pi[g(x)]^2\,dx \\
&= \int_a^b \pi\{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}\,dx \\
&= \int_0^1 \pi\left\{[x^2+2]^2 - \left[\frac{x+2}{2}\right]^2\right\}dx \\
&= \int_0^1 \pi\left\{x^4+4x^2+4 - \left[\frac{x^2+4x+4}{4}\right]\right\}dx \\
&= \pi\left[\frac{x^5}{5} + \frac{15x^3}{12} - \frac{x^2}{2} + 3x\right]\Big|_0^1.
\end{aligned}
$$

A região em questão é mostrada na Figura 3.23.

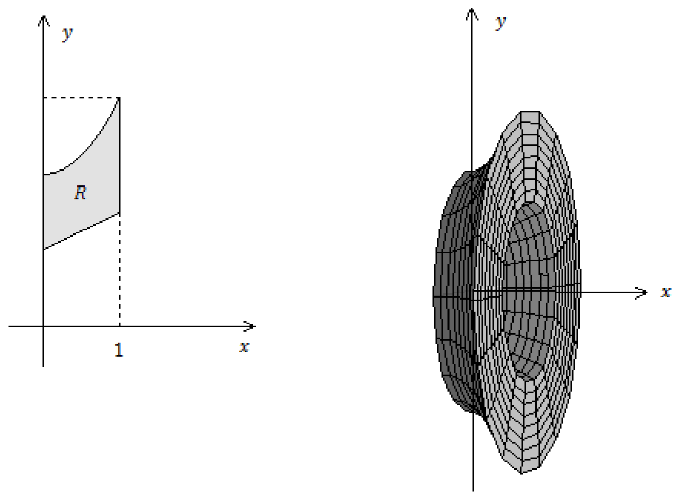


Figura 3.23: Exemplo 3.7.5 b

Logo, o volume do sólido de revolução mostrado na figura é:

$$V = \frac{79\pi}{20}\,u.v.$$

c) o volume do sólido gerado pela rotação da região limitada pela curva $y = x^3$ e pelas retas $y = 1$ e $y = 8$ em torno do eixo y.

Solução:

A Figura 3.24 mostra a região limitada pela curva $y = x^3$ e as retas $y = 1$ e $y = 8$.

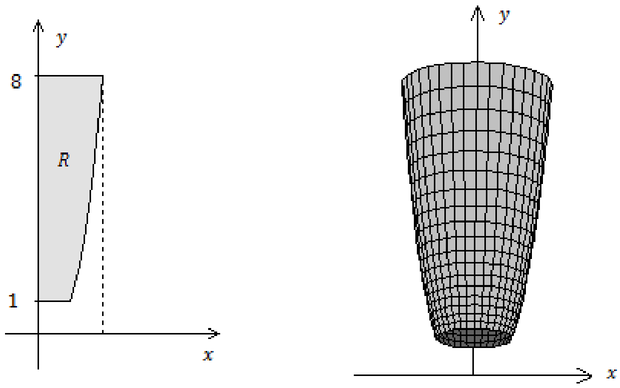


Figura 3.24: Exemplo 3.7.5 c

Calculando o volume do sólido de revolução, tem-se:

$$\begin{aligned} V &= \int dV = \int_c^d \pi[f(y)]^2\,dy \\ &= \int_1^8 \pi[\sqrt[3]{y}]^2\,dy \\ &= \pi\left[\frac{3y^{\frac{5}{3}}}{5}\right]\Big|_1^8. \end{aligned}$$

Assim, o volume do sólido mostrado na Figura 3.24 é:

$$V = \frac{93\pi}{5}\ u.v.$$

d) o volume do sólido gerado pela rotação em torno do eixo y da região limitada pelas curvas $y^2 = x$ e $x = 2y$.

Solução:

Na Figura 3.25 está representada a região R limitada pelas curvas $y^2 = x$ e $x = 2y$, bem como o sólido de revolução gerado pela rotação de R em torno do eixo y.

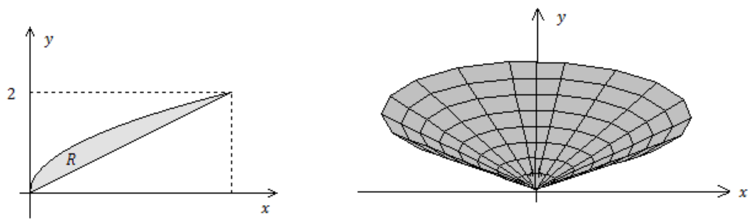


Figura 3.25: Exemplo 3.7.5 d

O volume do sólido de revolução descrito na Figura 3.25 é calculado pela diferença entre o volume do sólido exterior (gerado pela função $f(y) = 2y$) e o volume do sólido interior (gerado por $g(y) = y^2$):

$$\begin{aligned}
V &= \int_c^d \pi [f(y)]^2 \, dy - \int_c^d \pi [g(y)]^2 \, dy \\
&= \int_c^d \pi \{[f(y)]^2 - [g(y)]^2\} \, dy \\
&= \int_0^2 \pi \left\{[2y]^2 - [y^2]^2\right\} \, dy \\
&= \int_0^2 \pi \left[4y^2 - y^4\right] \, dy \\
&= \pi \left[\frac{4y^3}{3} - \frac{y^5}{5}\right] \Big|_0^2 .
\end{aligned}$$

Logo, o volume do sólido de revolução mostrado na Figura 3.25 é:

$$A = \frac{64\pi}{15} \, u.v.$$

3.7.4 Exercícios: Cálculo de Volumes

Exercício 3.7.4. Em cada um dos itens, calcule o volume do sólido gerado pela rotação da região limitada pelas curvas indicadas em torno do eixo x.

a) $y = 2x - x^2$ e $y = 0$. R: $\frac{16}{15}\pi \, u.v.$

b) $y = x^2 + 3$ e $y = 4$. R: $\frac{48}{5}\pi \, u.v.$

c) $y = \sqrt[3]{x}, x = 8$ e $y = 0$. R: $\frac{96}{5}\pi \, u.v.$

Exercício 3.7.5. Para cada item, determine o volume do sólido de revolução em torno do eixo y, gerado pela rotação da região limitada pelas curvas indicadas.

a) $y = x^2$ e $y = x^3$. R: $\frac{1}{10}\pi \, u.v.$

b) $y^2 = x$ e $y - x + 2 = 0$. R: $\frac{72}{5}\pi \, u.v.$

c) $y = x^2$ e $y^2 = 8x$. R: $\frac{24}{5}\pi \, u.v.$

3.7.5 Comprimento de arco

Definição 3.7.2. Seja a função $y = f(x)$ representada por uma curva suave no intervalo $[a, b]$, então o comprimento de arco de f entre a e b é dado por:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

Dedução:

Supondo f suave em $[a, b]$, então f é contínua em $[a, b]$. Considera-se uma partição P do intervalo $[a, b]$ tal que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$.

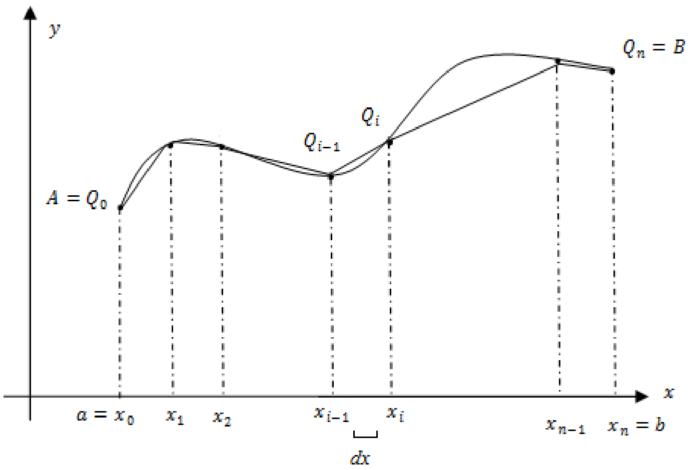


Figura 3.26: Comprimento de arco

Seja $i = 1, \ldots, n$. Ligando cada ponto Q_{i-1} a Q_i por um segmento de reta de comprimento $d(Q_{i-1}, Q_i)$, então o comprimento total da linha poligonal resultante é:

$$L_p = \sum_{i=1}^{n} d(Q_{i-1}, Q_i).$$

onde $d(Q_{i-1}, Q_i)$ é a fórmula da distância entre os pontos Q_{i-1} e Q_i,

$$d(Q_{i-1}, Q_i) = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}, \tag{3.7.3}$$

De acordo com o teorema do valor médio para derivadas, existe um c_i, com $x_{i-1} < c_i < x_i$ tal que $f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i)(x_i - x_{i-1})$. Assim, retornando em (3.7.3), tem-se:

$$\begin{aligned} d(Q_{i-1}, Q_i) &= \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f'(c_i)]^2 (x_i - x_{i-1})^2} \\ &= \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} dx. \end{aligned}$$

Consequentemente, o comprimento da poligonal é dado por:

$$L_p = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\, dx.$$

Quanto maior o número de pontos na partição P, o comprimento da poligonal estará mais próximo do valor do comprimento do arco s de f entre a e b, ou seja,

$$s = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Exemplo 3.7.6. Determine o comprimento de arco de $A(x_1, y_1)$ a $B(x_2, y_2)$ no gráfico de $f(x) = mx + b$. Mostre que o comprimento deste arco corresponde à distância entre os pontos dados

Solução:

Para calcular o comprimento de arco é necessário encontrar a derivada da função, e sendo $f(x)$ uma reta, o coeficiente angular é constante e é a própria derivada, assim:

$$m = f'(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Na fórmula, tem-se:

$$\begin{aligned} s &= \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left[\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right]^2}\, dx \\ &= \left[\sqrt{1 + \left[\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right]^2}\, x\right]\Bigg|_{x_1}^{x_2} \\ &= \left[\sqrt{1 + \left[\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right]^2}\right] x_2 - \left[\sqrt{1 + \left[\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right]^2}\right] x_1. \end{aligned}$$

Sendo assim, o comprimento de arco da curva dada é:

$$s = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \text{(Fórmula da distância entre dois pontos).}$$

Exemplo 3.7.7. Determine o comprimento das curvas, nos intervalos indicados.

a) $y = \dfrac{1}{3}(x^2 + 2)^{\frac{3}{2}}, \quad -2 \leq x \leq 3.$

b) $y = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{1}{2x}, \quad \left[\dfrac{1}{2}, 2\right].$

Solução:

a) Seja $y = \dfrac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}}$, então $y' = x\sqrt{x^2+2}$. Para o cálculo do comprimento da curva de $-2 \leq x \leq 3$, tem-se:

$$\begin{aligned} s &= \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx \\ &= \int_{-2}^3 \sqrt{1+(x\sqrt{x^2+2})^2}\,dx \\ &= \int_{-2}^3 \sqrt{1+x^4+2x^2} \\ &= \int_{-2}^3 (x^2+1)\,dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3}+x\right]\Bigg|_{-2}^{3}. \end{aligned}$$

Logo, o comprimento da curva dada é:

$$s = \frac{50}{3}\,u.c.$$

b) Para a função $y = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{1}{2x}$ tem-se $y' = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{2x^2}$. No intervalo $\left[\dfrac{1}{2}, 2\right]$, o comprimento de arco é:

$$\begin{aligned} s &= \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^2 \sqrt{1+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2x^2}\right)^2}\,dx \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^2 \sqrt{1+\frac{x^4}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4x^4}}\,dx \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^2 \sqrt{\frac{x^4}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4x^4}}\,dx \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^2 \sqrt{\frac{1}{4}\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2}\,dx \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{2}\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}-\frac{1}{x}\right]\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{2} \end{aligned}$$

Assim, o comprimento da curva é:

$$s = \frac{33}{16}\,u.c.$$

3.7.6 Exercício: Comprimento de Arco

Exercício 3.7.6. Calcule o comprimento do arco especificado em cada uma das curvas:

a) $y = x^{\frac{3}{2}}, \quad (0,0)$ e $(4,8)$.

b) $x = \dfrac{1}{3}y^{\frac{3}{2}}, \quad (0,0)$ e $(1,8)$.

c) $y = \dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{1}{8x^2}, \quad 1 \leq x \leq 2.$

d) $x = \dfrac{1}{2}y^3 + \dfrac{1}{6y}, \quad 1 \leq y \leq 3.$

Respostas

a) $\dfrac{8}{27}(10^{\frac{3}{2}} - 1)\, u.c.$ b) $\dfrac{8}{3}(\sqrt{27} - 1)\, u.c.$ c) $\dfrac{123}{32} u.c.$ d) $\dfrac{118}{9}\, u.c.$

3.8 Integrais impróprias

Na definição de integral definida, é necessário que a função $f(x)$ seja contínua no intervalo de integração e ainda, que este intervalo seja fechado. Quando uma dessas condições não é satisfeita, tem-se uma Integral Imprópria. As integrais impróprias são de grande utilidade em diversos ramos da Matemática como por exemplo, na solução de equações diferenciais ordinárias via transformada de Laplace e no estudo das probabilidades, em Estatística.

As integrais impróprias podem ser de dois tipos:

Primeiro Tipo) Quando a integral possui limites de integração infinitos.

PT1) Se $f(x)$ é uma função contínua $\forall x \geq a$, então,

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\, dx, \quad \text{se este limite existir.}$$

Observação: Diz-se que a integral imprópria **converge** se o limite acima existir, ou seja, se o resultado do limite for finito, caso contrário, a integral imprópria **diverge**.

Exemplo 3.8.1. Mostre que:

a) $I_a = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^5} = \frac{1}{4}$

b) $I_b = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = +\infty$

Solução:

a) $I_a = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^5} = \frac{1}{4}.$

Da propriedade (PT1):

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^5} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^5}.$$

Resolvendo a integral imediata, obtém-se:

$$\begin{aligned} I_a &= \lim_{b\to+\infty} \left[-\frac{x^{-4}}{4}\right]\Bigg|_1^b \\ &= \lim_{b\to+\infty} \left[-\frac{1}{b^4} + \frac{1}{4}\right]. \end{aligned}$$

Portanto, a integral imprópria converge, pois

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^5} = \frac{1}{4}.$$

b) $I_b = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = +\infty.$

Utilizando a propriedade (PT1) e resolvendo a integral imediata, obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} &= \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{\sqrt{x}} \\ &= \lim_{b\to+\infty} [2\sqrt{x}]\Big|_1^b \\ &= \lim_{b\to+\infty} [2\sqrt{b} - 2]. \end{aligned}$$

Logo, a integral imprópria diverge porque

$$I_b = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

PT2) Se $f(x)$ é uma função contínua $\forall x \leq b$, então,

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx, \quad \text{se este limite existir.}$$

Observação: Diz-se que a integral imprópria **converge** se o limite acima existir, ou seja, se o resultado do limite for finito, caso contrário, a integral imprópria **diverge**.

IMEF - FURG - IMEF - FURG - IMEF - FURG - IMEF - FURG - IMEF - FURG - IMEF - FURG - IMEF - FURG - IMEF - FURG - IMEF - FURG - IMEF - FURG - IM

Exemplo 3.8.2. Mostre que $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{2} \frac{dx}{(4-x)^2} = \frac{1}{2}$.

Solução:

Pela propriedade (PT2), tem-se:

$$\int_{-\infty}^{2} \frac{dx}{(4-x)^2} = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{2} \frac{dx}{(4-x)^2}.$$

Resolve-se a integral por substituição para obter:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{a\to-\infty} \left.\frac{1}{4-x}\right|_{a}^{2} \\ &= \lim_{a\to-\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4-a}\right). \end{aligned}$$

Logo, a integral imprópria converge, pois

$$\int_{-\infty}^{2} \frac{dx}{(4-x)^2} = \frac{1}{2}.$$

PT3) Se $f(x)$ é uma função contínua $\forall x \in R$, então,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} f(x)\,dx + \lim_{b\to+\infty} \int_{0}^{b} f(x)\,dx,$$

se estes limites existirem.

Observação: Diz-se que a integral imprópria **converge** se os limites acima existirem, ou seja, se o resultado dos limites for finito, caso contrário, a integral imprópria **diverge**.

Exemplo 3.8.3. Mostre que $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$.

Solução:

De acordo com a propriedade (PT3), tem-se:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b\to+\infty} \int_{0}^{b} \frac{dx}{1+x^2}.$$

Calculando as integrais por substituição trigonométrica, obtém-se:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{a\to-\infty} [\operatorname{arctg}(x)]\Big|_{a}^{0} + \lim_{b\to+\infty} [\operatorname{arctg}(x)]\Big|_{0}^{b} \\ &= \lim_{a\to-\infty} [\operatorname{arctg}(0) - \operatorname{arctg}(a)] + \lim_{b\to\infty} [\operatorname{arctg}(b) - \operatorname{arctg}(0)]. \end{aligned}$$

Assim, a integral imprópria converge, pois

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

Segundo Tipo) Quando a função integrando f não está definida em algum dos pontos do intervalo de integração.

ST1) Se f é uma função contínua no intervalo $(a, b]$ e não está definida no ponto $x = a$, então,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{h\to 0}\int_{a+h}^b f(x)\,dx, \quad \text{se este limite existir.}$$

Exemplo 3.8.4. Resolva a integral $I = \displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,dx$ e determine se ela converge ou diverge.

Solução:

Pela propriedade (ST1), tem-se:

$$\int_0^1 \ln(x)\,dx = \lim_{h\to 0}\int_h^1 \ln(x)\,dx.$$

Resolve-se a integral por partes para obter:

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{h\to 0}\left\{[x\,\ln|x| - x]\Big|_h^1\right\}\\
&= \lim_{h\to 0}[(1\,\ln(1) - 1) - (h\,\ln(h) - h)]\\
&= \lim_{h\to 0}\left(-1 - \frac{\ln(h)}{\frac{1}{h}} + h\right)\\
&= -1 - \lim_{h\to 0}\left(\frac{\ln(h)}{\frac{1}{h}}\right) \quad \text{(Regra de L'Hospital)}\\
&= -1 - \lim_{h\to 0} h.
\end{aligned}$$

Portanto, a integral converge e seu valor é $I = -1$.

ST2) Se $f(x)$ é uma função contínua no intervalo $[a, b)$ e não está definida no ponto $x = b$, então,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{h\to 0}\int_a^{b-h} f(x)\,dx, \quad \text{se este limite existir.}$$

Exemplo 3.8.5. Calcule a integral $I = \displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}$ e determine se ela converge ou diverge.

Solução:

A função $f(x) = \sqrt{9-x^2}$ não está definida no ponto $x = 3$, logo, pela propriedade (ST2):

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \lim_{h \to 0} \int_0^{3-h} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}.$$

Resolvendo a integral por substituição trigonométrica, obtém-se:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{h \to 0} \left[\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{3}\right)\right]\Big|_0^{3-h} \\ &= \lim_{h \to 0} \left[\operatorname{arcsen}\left(\frac{3-h}{3}\right) - \operatorname{arcsen}(0)\right]. \end{aligned}$$

Logo, a integral converge para o valor de $\frac{\pi}{2}$.

ST3) Se $f(x)$ é uma função contínua nos intervalos $[a, c)$ e $(c, b]$, e não está definida ou não é contínua no ponto $x = c$, $a < c < b$, então,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \lim_{h \to 0} \int_a^{c-h} f(x)\,dx + \lim_{h \to 0} \int_{c+h}^b f(x)\,dx,$$

se estes limites existirem.

Observação: A integral imprópria **converge** se os limites acima existirem, ou seja, se o resultado do limite for finito, caso contrário, **diverge**.

Exemplo 3.8.6. Resolva a integral abaixo e determine se ela converge ou diverge:

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}}$$

Solução:

A função $f(x) = x^{-\frac{2}{3}}$ não está definida no ponto $x = 0$, assim pela propriedade (ST3), tem-se:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}} = \lim_{h \to 0} \int_{-1}^{h} \frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}} + \lim_{h \to 0} \int_{a}^{1} \frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}}.$$

Resolve-se a integral imediata,

$$\begin{aligned} I &= \lim_{h \to 0} \left[3x^{\frac{1}{3}}\Big|_{-1}^{h} + 3x^{\frac{1}{3}}\Big|_{h}^{-1}\right] \\ &= \lim_{h \to 0} \{[3h^{\frac{1}{3}} - 3(-1)^{\frac{1}{3}}] + [3 - 3h^{\frac{1}{3}}].\} \end{aligned}$$

Assim a integral converge e seu valor é $I = 6$.

3.8.1 Exercícios: Integrais Impróprias

Exercício 3.8.1. Mostre que:

a) $\displaystyle\int_4^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}} = 1$

b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{4}$

c) $\displaystyle\int_0^{4} \frac{8\,dx}{\sqrt{16-x^2}} = 4\pi$

d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{(x+1)^3} = \frac{1}{2}$

e) $\displaystyle\int_1^{2} \frac{x\,dx}{\sqrt{x-1}} = \frac{8}{3}$

f) $\displaystyle\int_0^{1} x\,\ln(x)\,dx = -\frac{1}{4}$

g) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x\,e^x\,dx = -1$

h) $\displaystyle\int_0^{+\infty} 4\,e^{8x}\,dx = +\infty$

i) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)} = \ln(2)$

j) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{e^x\,dx}{\sqrt{e^x-1}} = 2\sqrt{e-1}.$

Exercício 3.8.2. Para quais valores de p a integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ converge?
R: Converge para $p > 1$ e diverge para $p \leq 1$.

Exercício 3.8.3. Determine se a integral é imprópria e, se for, explique o porquê.

a) $\displaystyle\int_3^{5} \frac{dx}{x-3}$ b) $\displaystyle\int_1^{5} \frac{dx}{x+3}$ c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx$ d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x-1}}.$

Respostas

a) Integral imprópria divergente.

b) Não é uma integral imprópria e tem valor igual a e^{-1}.

c) Integral imprópria divergente.

d) Integral imprópria divergente.

3.9 Lista de Exercícios

1. Observe a Figura 3.27. Expresse a área da região limitada pelos gráficos de $y = -x^2+5x+7$ e $y = -x+12$ ao longo de $[-2, 5]$ cujo gráfico está na figura. Determine os pontos de intersecção das curvas. Apresente o(s) elemento(s) de área utilizado(s) no cálculo.

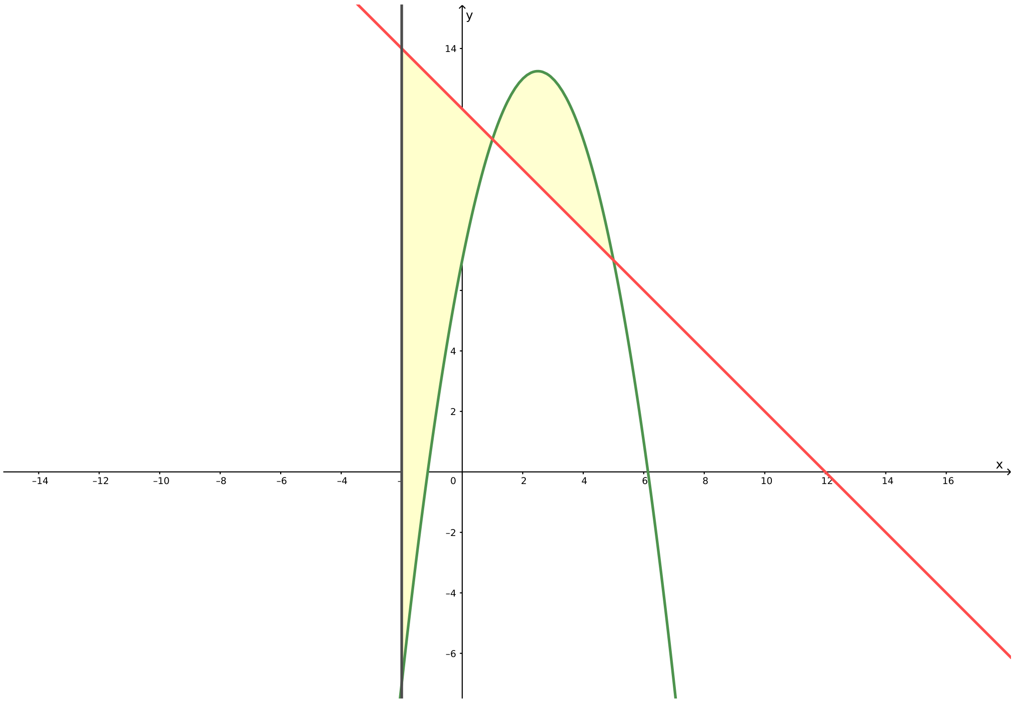


Figura 3.27: Gráficos de $x = -2$, $y = -x^2 + 5x + 7$ e $y = -x + 12$.

2. Observe a Figura 3.28. Expresse a área da região limitada pelos gráficos de $y = x^2 - 5x - 7$ e $y = x - 12$ ao longo de $[-2, 5]$ cujo gráfico está na figura. Determine os pontos de intersecção das curvas. Apresente o(s) elemento(s) de área utilizado(s) no cálculo.

3. Responda o que se pede sobre a integral $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} x^2 e^x \, dx$.

   a) Qual das opções a seguir representa a aplicação correta da primeira integração por partes na integral acima?

      (i) $u = x^2, v = e^x$

      (ii) $u = x^2, v = -e^x$

      (iii) $u = e^x, v = \dfrac{x^3}{3}$

      (iv) $u = e^x, v = x^2$

      (v) $u = x^2 e^x, v = x$

      (vi) nenhuma das alternativas anteriores

   b) A integral indefinida é

      (i) $e^x(x^2 - 2x - 2) + C$

      (ii) $-e^x(x^2 - 2x + 2) + C$

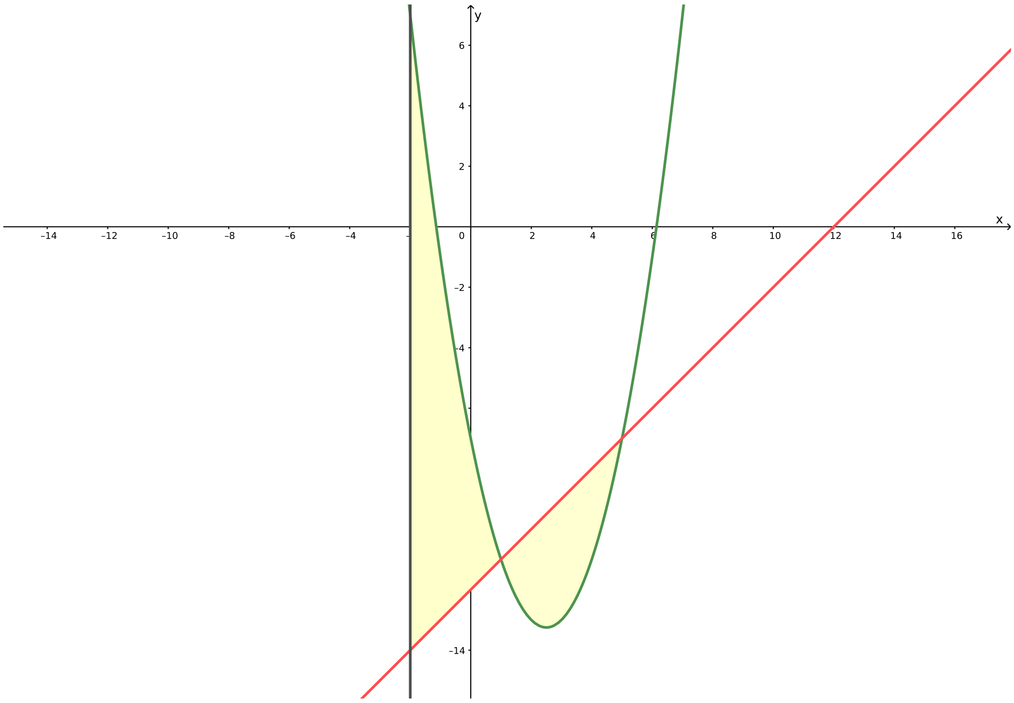


Figura 3.28: Gráficos de $x=-2$, $y=x^2-5x-7$ e $y=x-12$.

(iii) $e^{-x}(x^2-2x+2)+C$

(iv) $e^{x}(x^2-2x+2)+C$

(v) $-e^{-x}(x^2+2x+2)+C$

(vi) nenhuma das alternativas anteriores

c) A integral $I=\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2e^x\,dx$ tem valor:

(i) $e-\dfrac{1}{e}$

(ii) $5\left(e-\dfrac{1}{e}\right)$

(iii) $e+\dfrac{5}{e}$

(iv) $e+\dfrac{1}{e}$

(v) $e-\dfrac{5}{e}$

(vi) nenhuma das alternativas anteriores

4. Considere a região R limitada por $y=2\sqrt{x}$, $y=2$ e $x=0$.

a) Esboce a região R.

b) Expresse a área de R usando uma integral definida.

c) Expresse o comprimento de arco de $y = 2\sqrt{x}$ que limita R.

d) Considere o sólido gerado pela rotação de R ao redor do eixo x. Qual das integrais representa o seu volume V?

(i) $I = 4\pi \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(1 - \frac{x}{2}\right)\, dx$

(ii) $I = 4\pi \displaystyle\int_{0}^{1} (1 + x)\, dx$

(iii) $I = 4\pi \displaystyle\int_{-1}^{1} (1 - x)\, dx$

(iv) $I = 4 \displaystyle\int_{0}^{1} (1 + x)\, dx$

(v) nenhuma das alternativas anteriores

5. Expresse o comprimento do arco de $f(x) = \ln(\cos(x))$ no intervalo $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$.

6. Expresse o comprimento do arco de $f(x) = \ln(\text{sen}(x))$ no intervalo $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$.

7. A região no primeiro quadrante limitada por $y = e^x$, $x = 0$ e $y = e$ é girada ao redor do eixo y . Calcule o volume do sólido de revolução gerado dessa maneira. (Esboce a região, apresente o elemento de volume.)

8. Expresse a área A da região limitada pelos gráficos de $f(x) = x+5$, $h(x) = -1$, $g(x) = 2$ e $y^2 = x$. Determine os pontos de intersecção das curvas. Apresente o(s) elemento(s) de área utilizado(s) no cálculo.

9. Considere a Figura 3.29.

a) Represente a região R limitada por $y = 0$, $x = 0$, $x = e$, $y = x + 1$ e $y = \ln(x)$.

b) Expresse a área da região R.

c) Expresse o volume do sólido gerado pela rotação de $y = \ln(x)$, $x = e$ e $y = 0$ em torno do eixo x.

10. A transformada de Laplace de uma função $f(x)$ é definida como $\int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx$ sabendo que $s > 0$. Calcule a transformada de Laplace de $f(x) = x$.

11. Considere a integral $I = \displaystyle\int_0^1 \ln(x)\, dx$. Responda:

(a) A integral é imprópria? Justifique sua resposta.

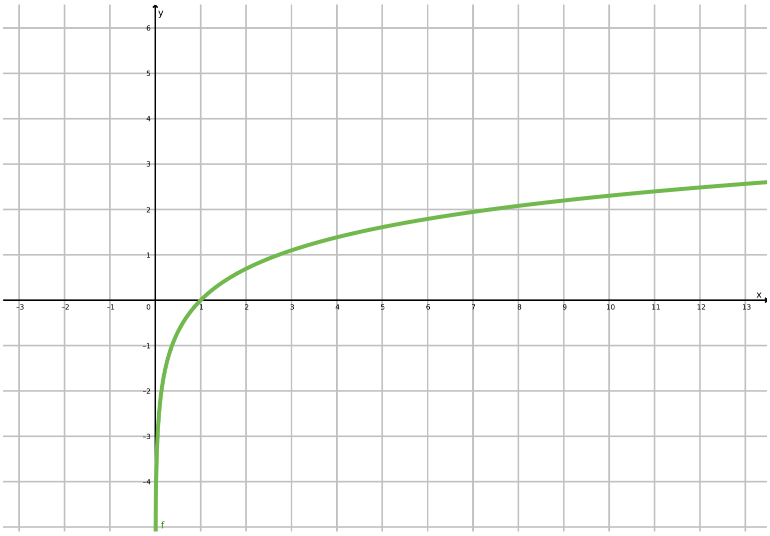


Figura 3.29: Gráfico de $y = \ln(x)$.

(b) Resolva $I = \displaystyle\int \ln(x)\,dx$

(c) Determine o valor de I.

Respostas

1. $x = 1$; $x = 5$; $A = \displaystyle\int_{-2}^{1} x^2 - 6x + 5dx + \int_{1}^{5} -x^2 + 6x - 5dx.$

2. $x = 1$; $x = 5$; $A = \displaystyle\int_{-2}^{1} x^2 - 6x + 5dx + \int_{1}^{5} -x^2 + 6x - 5dx.$

3. $a)$ (i); $b)$ (iv); $c)$ (v).

4. $b) A = \displaystyle\int_0^1 2(1 - \sqrt{x})dx$; $c) L = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 + \frac{1}{x}}dx$; $d)$ (iii).

5. $L = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1 + \mathrm{tg}^2(x)}dx.$

6. $L = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1 + \mathrm{tg}^2(x)}dx.$

7. $V = 0,72\pi$ u.v..

8. $A = \displaystyle\int_{-1}^{2} y^2 - (y - 5)dy.$

9. $b) A = \displaystyle\int_0^1 (x + 1)dx + \int_1^e (x + 1) - \ln(x)dx$; $c) V = \displaystyle\int_1^e \pi(\ln(x))^2 dx.$

10. $T = \dfrac{1}{s^2}.$

11. $a)$Sim, pois a função não está definida em $x = 0$; $b)I = x\ln(x) - x + C$.