UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE - FURG
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E FÍSICA - IMEF

FABÍOLA AIUB SPEROTTO
DAIANE SILVA DE FREITAS

Cônicas e Superfícies

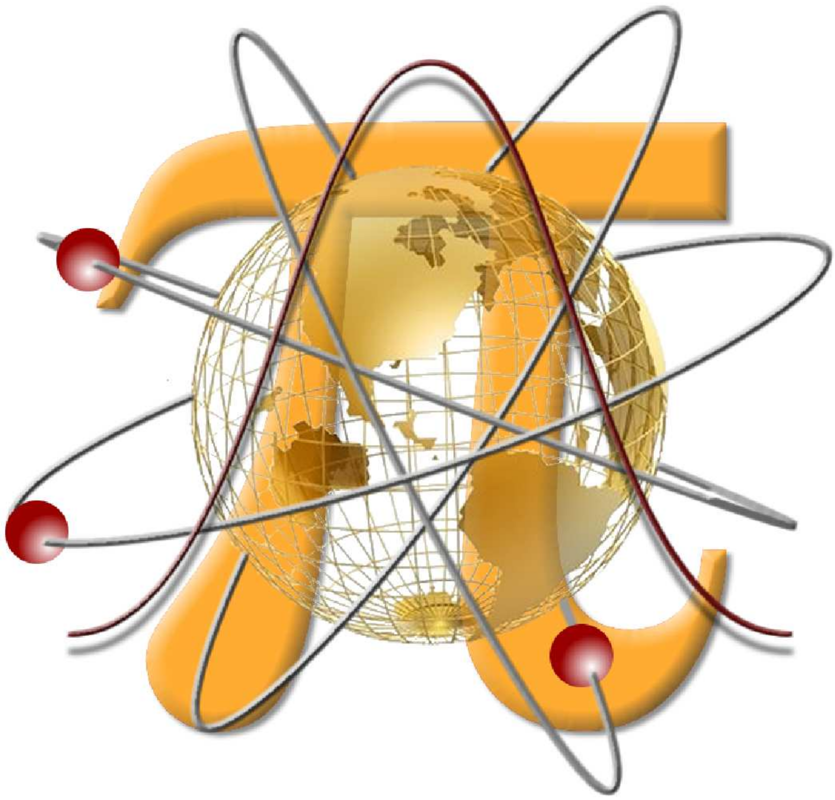
1° Edição

Rio Grande

2018

Universidade Federal do Rio Grande - FURG

Cônicas e Superfícies



Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF
Fabíola Aiub Sperotto
Daiane Silva de Freitas

site: www.lemas.furg.br/index.php/material-didatico

Sumário

Capítulo 1

Cônicas

1.1 Introdução

Você sabia que durante vários séculos, pensava-se que as órbitas descritas pelos planetas eram circunferências e que a Terra era o centro?

Johannes Kepler, (1571-1630) matemático e astrônomo, estudou as órbitas planetárias e observou que a órbita de Marte em volta do Sol era uma elipse e não um círculo, assim como os demais, embora sejam elipses menos esticadas. Estudos que levaram as leis do movimento planetário. Ele observou também que a velocidade de cada corpo celeste varia ao longo da trajetória.

Já que o Sol não se encontra no centro da elipse e sim num dos focos, os planetas ora estão mais próximos do Sol ora mais afastados. Kepler observou que quanto mais próximo o planeta está do Sol mais rápido ele viaja. Essa relação matemática ficou conhecida como 2° Lei de Kepler: "A linha que une um planeta ao Sol atravessa áreas iguais em intervalos iguais de tempo."

Apolônio, um matemático e astrônomo, ($\pm 262 - 190$ a.C.), mostrou em sua obra *Seções cônicas*, os resultados iniciados pelos seus antecessores, mostrando que a partir de um cone é possível obter as três espécies de seções cônicas, apenas variando a inclinação do plano de seção. Foi Apolônio também quem introduziu os nomes parábola, elipse e hipérbole, utilizados até hoje.

Uma seção cônica é uma curva obtida cortando-se um cone de duas folhas, Figura 1.1, por um plano que não passa pelo vértice, chamado de plano secante.

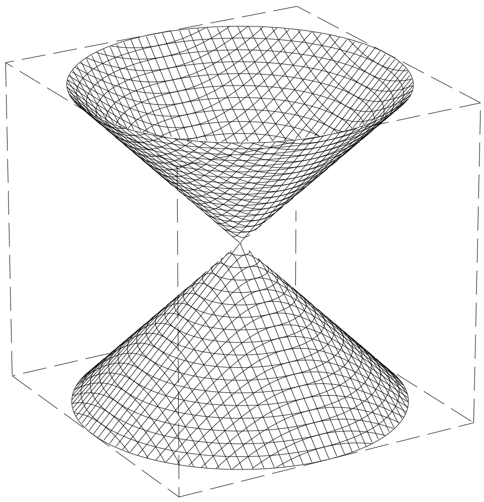


Figura 1.1: Superfície Cônica

Se a superfície for seccionada por um plano teremos:

- A Origem, quando o plano for perpendicular ao eixo de simetria, passando pelo vértice O.
- Um plano perfeitamente horizontal não pelo vértice produz uma circunferência, Figura 1.2.

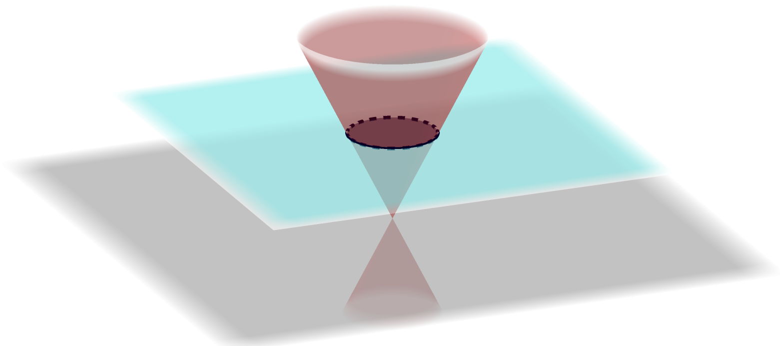


Figura 1.2: Circunferência

- Plano inclinado:
  - Plano ligeiramente inclinado deforma a circunferência e cria uma elipse, conforme Figura 1.3.

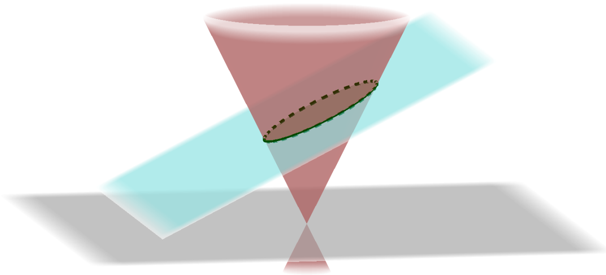


Figura 1.3: Elipse

– Na Figura 1.4, aumentando a inclinação, a elipse não se fecha e se transforma em uma parábola.

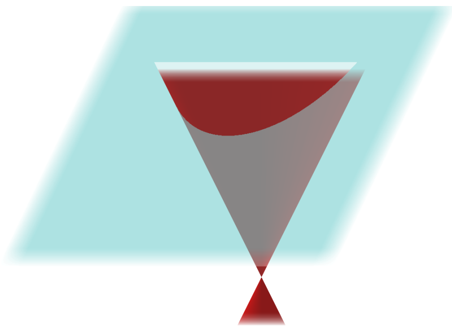


Figura 1.4: Parábola

– Por uma plano vertical cria-se uma hipérbole, Figura 1.5, que é a única das seções cônicas que possui dois ramos.

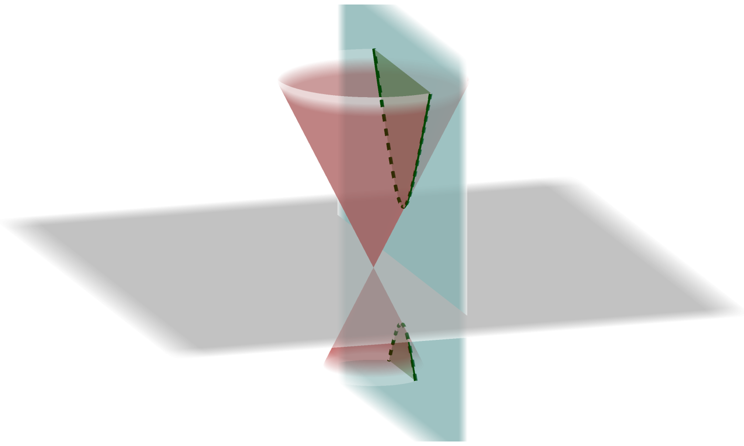


Figura 1.5: Hipérbole

Algumas aplicações:

- As elipses são usadas na fabricação de engrenagens de máquinas (Engenharia Mecânica).
- Os arcos de pontes de concreto e de pedras ou tetos tem muitas vezes formas elípticas ou parabólicas (Engenharia).
- As parábolas são usadas em espelhos refletores e faróis de automóveis.
- Um teto curvo, como uma abóboda de uma catedral, os sons emitidos em um foco tem melhor audibilidade nos pontos próximos ao outro foco.
- Os refletores de dentistas usam refletores elípticos que tem como objetivo concentrar o máximo de luz onde se está trabalhando.
- Alguns telescópios denominados refletores usam um espelho hiperbólico secundário, além do refletor parabólico principal, para redirecionar a luz do foco principal para um ponto mais conveniente.

1.2 Parábola

1.2.1 A Geometria da Parábola

A parábola é o lugar geométrico dos pontos que estão equidistantes de um ponto fixo, denominado *foco*(F) e de uma reta fixa (diretriz) nesse plano. Toda parábola é simétrica em relação a reta focal. Seu vértice é o ponto V da reta focal que equidista do (foco) F e da reta diretriz d. A reta que contém o foco e é perpendicular à diretriz chama-se *eixo de simetria*. Na Figura 1.6, podemos observar os elementos da Parábola.

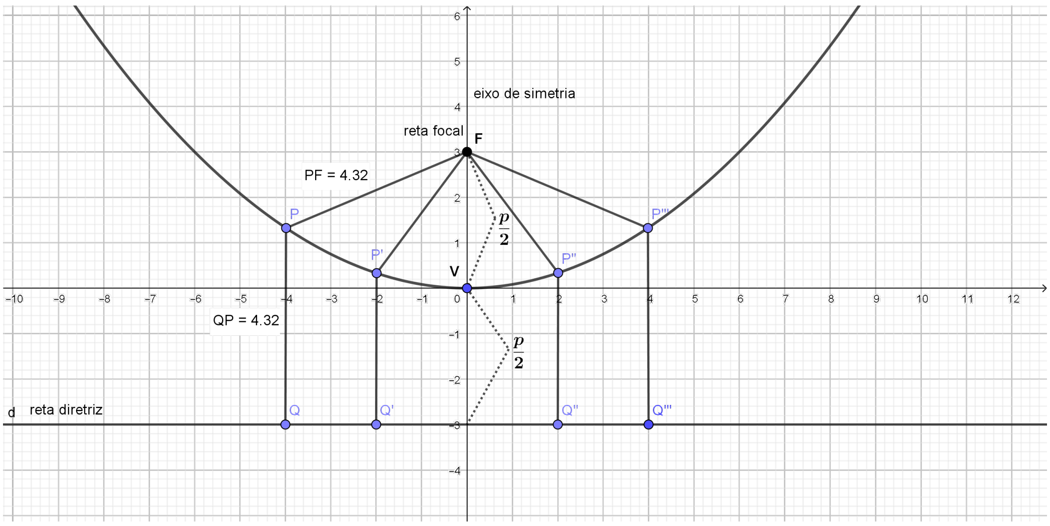


Figura 1.6: Elementos da Parábola

Elementos:

- Foco: é o ponto F.
- Diretriz: é a reta d perpendicular ao eixo de simetria.
- Eixo de simetria: é a reta que passa por F e é perpendicular a d. A curva é *simétrica* em relação ao seu eixo de simetria.
- Vértice: é o ponto V de interseção da parábola com seu eixo.
- p: parâmetro que representa a distância do foco à diretriz.
- Reta VF: eixo de simetria da Parábola.
- Amplitude focal: é o comprimento da corda que contém o foco e é perpendicular ao eixo de simetria.

Observamos que na Figura 1.6 para qualquer ponto da Parábola a distância até o foco é igual à distância até a reta diretriz. Então, dizemos que um ponto P pertence à Parábola se e somente se

$$|\overrightarrow{FP}| = |\overrightarrow{PQ}| \tag{1.1}$$

Sabe-se que essa propriedade aumenta, por exemplo, a capacidade de captação de ondas pelas antenas parabólicas, usadas em comunicação e astronomia. O formato da parábola faz com que as ondas se reflitam todas no foco, não importando em que ponto elas batam. Se o dispositivo receptor estiver localizado no foco, garante-se que todas as ondas sejam captadas.

1.2.2 Equações reduzidas

Inicialmente consideremos a parábola com vértice $V(0,0)$, no plano cartesiano, temos duas situações a saber:

- **O eixo da parábola é o eixo Oy**: O ponto $P(x,y)$ é um ponto qualquer da parábola de foco $F(0,\frac{p}{2})$ e diretriz de equação $y = -\frac{p}{2}$.

  Pela definição de parábola expressa pela igualdade (1.1) levando em consideração que $Q(x, -\frac{p}{2}) \in d$, temos:

$$\begin{aligned}
|\left(x-0, y-\frac{p}{2}\right)| &= |\left(x-x, y+\frac{p}{2}\right)| \\
\sqrt{(x-0)^2+\left(y-\frac{p}{2}\right)^2} &= \sqrt{(x-x)^2+\left(y+\frac{p}{2}\right)^2} \\
(x-0)^2+\left(y-\frac{p}{2}\right)^2 &= (x-x)^2+\left(y+\frac{p}{2}\right)^2 \\
x^2+y^2-py+\frac{p^2}{4} &= y^2+py+\frac{p^2}{4} \\
x^2 &= 2py \qquad (1.2)
\end{aligned}$$

  A equação (1.2) é a **Equação Reduzida da parábola de vértice na origem e eixo de simetria sobre o eixo** Oy.

  Abertura da Parábola com eixo de simetria no eixo das ordenadas

  - Concavidade voltada para cima: o foco pertence ao semi-eixo positivo das ordenadas. O número $p \neq 0$ é o parâmetro da parábola. Pela Equação 1.2, como $py \geq 0$, o parâmetro p e a ordenada y tem sinais iguais. Se $p > 0$, a parábola tem abertura para cima.

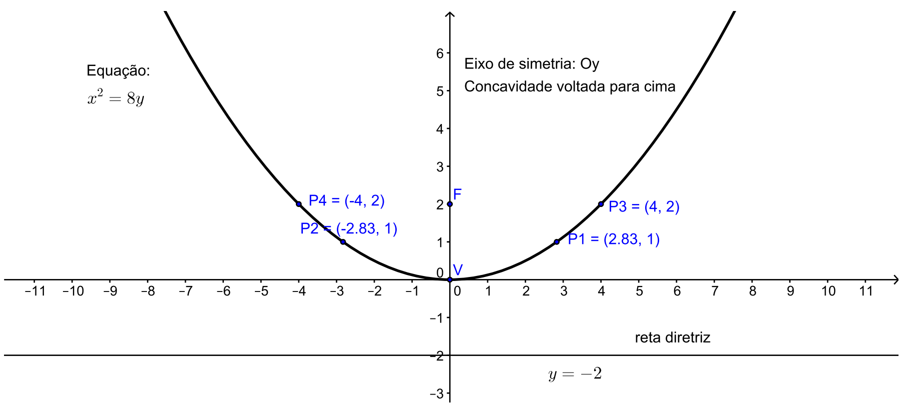


Figura 1.7: Gráfico de $x^2 = 8y$, com $p > 0$

– Concavidade voltada para baixo: o foco pertence ao semi-eixo negativo das ordenadas. Se $p < 0$, a parábola tem abertura para baixo.

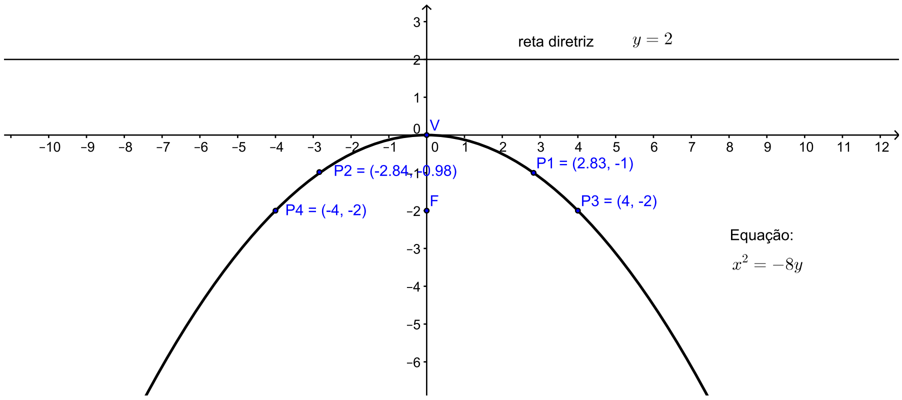


Figura 1.8: Gráfico de $x^2 = -8y$, com $p < 0$

Pela Equação 1.2, o gráfico é simétrico em relação ao eixo Oy, já que substituindo x por $-x$ não altera a equação. Sendo assim, se o ponto (x,y) pertence a curva, o ponto $(-x,y)$ também pertence. Isso fica claro nas Figuras 1.7 e 1.8.

- **O eixo da parábola é o eixo Ox**: Seja $P(x,y)$ um ponto qualquer da parábola de foco $F(\frac{p}{2},0)$ e diretriz de equação $x = -\frac{p}{2}$.

  A **Equação reduzida da parábola com eixo de simetria sobre o eixo** Ox, de forma análoga ao primeiro caso, é dada por

$$y^2 = 2px \tag{1.3}$$

Abertura da Parábola com eixo de simetria no eixo das abscissas

– Concavidade voltada para direita: o foco pertence ao semi-eixo positivo das abscissas. Então $p > 0$, conforme Figura 1.9.

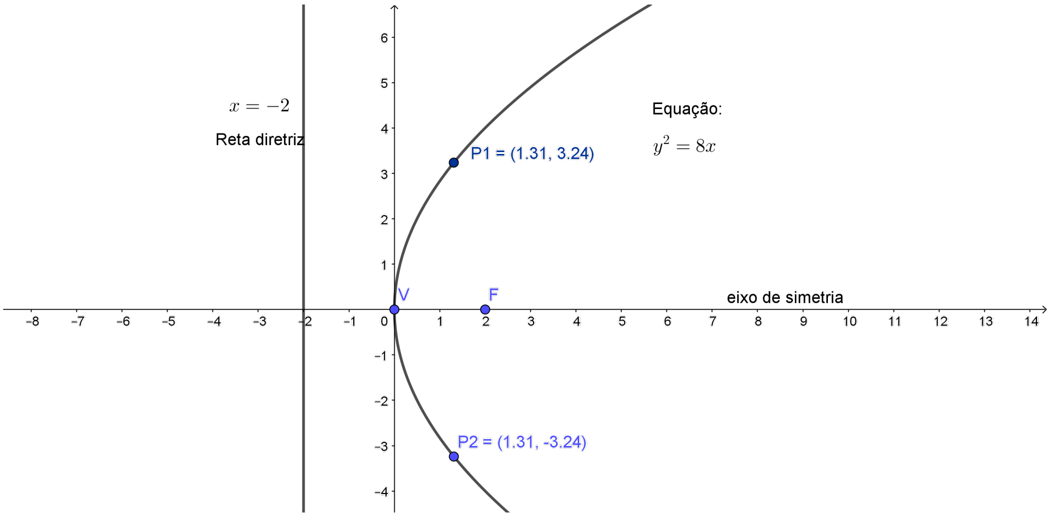


Figura 1.9: Gráfico de $y^2 = 8x$, com $p > 0$

- Concavidade voltada para esquerda: na Figura 1.10, o foco pertence ao semi-eixo negativo das abscissas e $p < 0$.

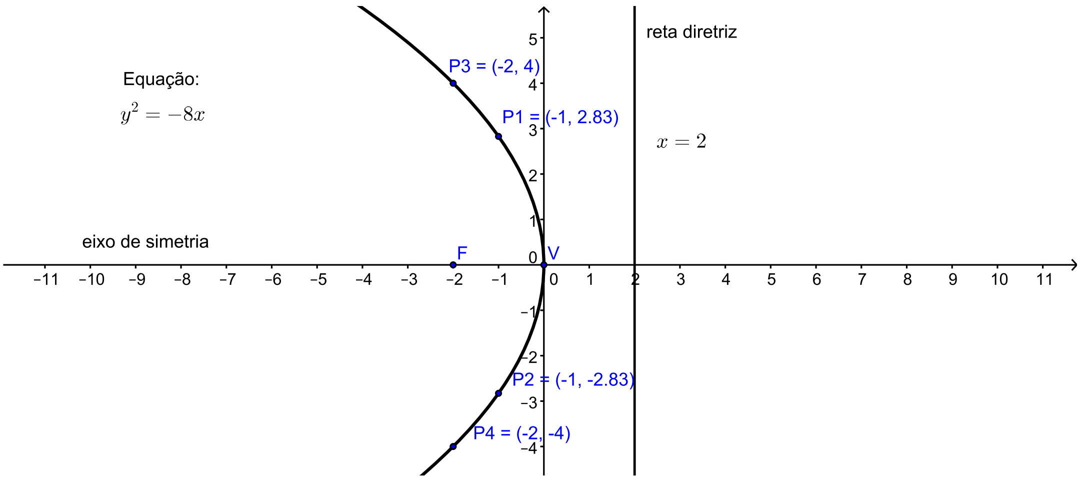


Figura 1.10: Gráfico de $y^2 = -8x$, com $p < 0$

Com relação a simetria da parábola, quando a equação da parábola é $y^2 = 2px$, temos valores de y que são simétricos. Então, a parábola é simétrica em relação ao eixo dos x. Observamos este fato analisando os gráficos 1.9 e 1.10. Esta relação de simetria é útil para a construção de gráficos, pois determinando uma das metades do gráfico a outra é uma reflexão desta.

Proposição Em relação a um sistema ortogonal de coordenadas, as equações $y^2 = qx$ e $x^2 = qy$ descrevem parábolas se, e somente se, $q \neq 0$.

Exemplo 1. *Dada a equação da parábola $y^2 = 7x$, obtenha as coordenadas do foco, a equação diretriz e o parâmetro.*

Solução:

$$y^2 = 7x$$

Equação do tipo:

$$y^2 = 2px$$

Portanto, a equação representa uma parábola com eixo de simetria no eixo dos x. Então, o coeficiente de x é

$$2p = 7$$

Logo o parâmetro é $p = \dfrac{7}{2}$.

As coordenadas do Foco: $F(\frac{p}{2},0) \Rightarrow F(\frac{7}{4},0)$. Visto que a abertura da parábola está voltada para a direita.

Equação da diretriz: $x = -\dfrac{7}{4}$. Ou $x + \dfrac{7}{4} = 0$.

Um esboço do gráfico:

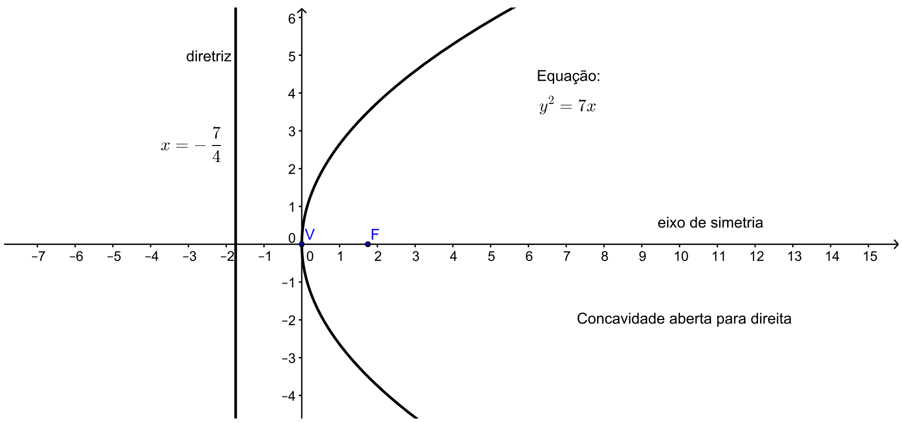


Figura 1.11: Gráfico da parábola $y^2 = 7x$

Exemplo 2. *Traçar um esboço do gráfico e obter a equação da parábola de vértice $V(0{,}0)$ e foco $F(0, -1)$.*

Solução: A equação é da forma $x^2 = 2py$, pois o foco está localizado no semi-eixo negativo das ordenadas. O eixo de simetria da parábola é Oy. O parâmetro,

$$\frac{p}{2} = -1 \Rightarrow p = -2$$

A equação da parábola é $x^2 = -4y$.
Gráfico

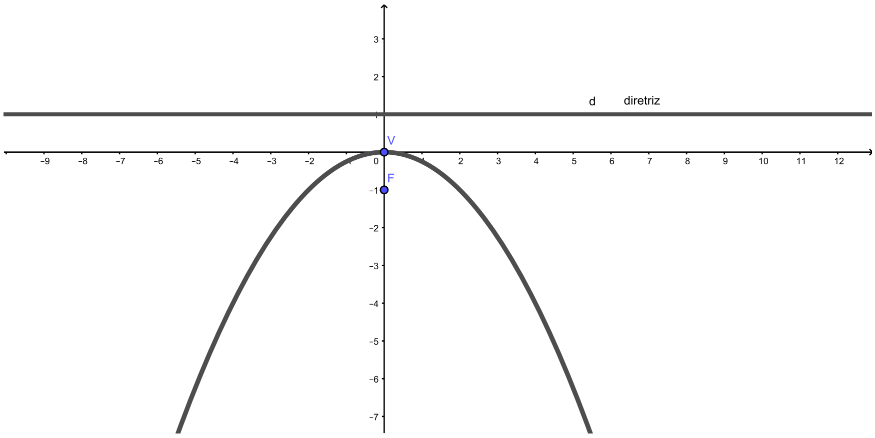


Figura 1.12: Gráfico da parábola $x^2 = -4y$

1.2.3 A Função do Segundo Grau

Toda parábola é definida por uma função de segundo grau (ou também conhecida como função quadrática). Uma função do segundo grau é uma função polinomial dada pela forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a, b, c são constantes reais e $a \neq 0$. O gráfico desta função é uma parábola, com concavidade para cima ou para baixo. observamos os gráficos a seguir e verifique como é possível deduzir uma série de informações sobre a parábola, só analisando a função que a define:

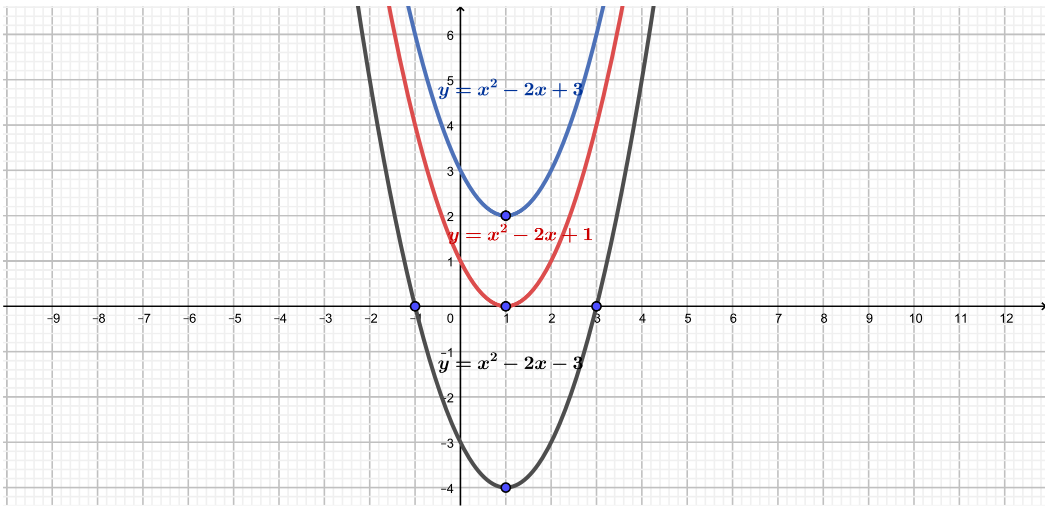


Figura 1.13: Funções do segundo grau

- as três parábolas tem concavidade voltada para cima;
- em todas as funções, o coeficiente $a = 1$;
- a parábola azul não tem raiz (a curva não cruza o eixo x).
- a parábola vermelha tem uma única raiz, que coincide com o vértice;
- a parábola preta tem duas raízes;
- nas três funções, o valor do coeficiente c coincide com o ponto em que a curva corta o eixo y.

Observando o conjunto de parábolas, podemos concluir que:

- o parâmetro a está relacionado à concavidade da parábola;
- o parâmetro c é exatamente o valor da coordenada y do ponto em que a parábola corta o eixo y (no ponto em que $x = 0$);
- o número de raízes está relacionado com o número de pontos em que a parábola cruza o eixo x;
- quando a concavidade é voltada para cima, dizemos que o vértice é um ponto de **mínimo**, ou seja, o vértice é o ponto da parábola no qual a coordenada y tem o menor valor possível. De forma análoga, se a parábola tem concavidade voltada para baixo, chamamos o vértice de ponto de **máximo**, que é aquele em que a coordenada y atinge o maior valor possível.

1.3 Translação de eixos

Uma curva não é afetada pela posição de seus eixos coordenados, mas, no entanto suas respectivas equações sofrem alterações. Isto fica evidente comparando o gráfico da Figura 1.13 com os gráficos anteriores.

Vamos analisar agora o caso em que o vértice de uma cônica é um ponto (h,k) do plano cartesiano, isto é, obtemos um novo sistema $x'O'y'$ cuja origem é $O'(h,k)$. Esse novo sistema tem a mesma unidade de medida, mesma direção e mesmo sentido dos eixos Ox e Oy.

Nesses casos, as parábolas de equação $x^2 = 2py$ e $y^2 = 2px$, são transladadas horizontalmente por h unidades e verticalmente por k unidades, desta forma, o vértice da parábola se move da origem do plano cartesiano para o ponto (h,k).

Na Figura 1.14, as relações $x = x' + h$ e $y = y' + k$ ou $x' = x - h$ e $y' = y - k$ são as fórmulas de translação e que permitem transformar coordenadas de um sistema para outro.

A relação entre os dois conjuntos de coordenadas é dado por:

$$\overline{A_1P} = \overline{AP} - \overline{AA_1} \Rightarrow y' = y - k$$
$$\overline{B_1P} = \overline{BP} - \overline{BB_1} \Rightarrow x' = x - h$$

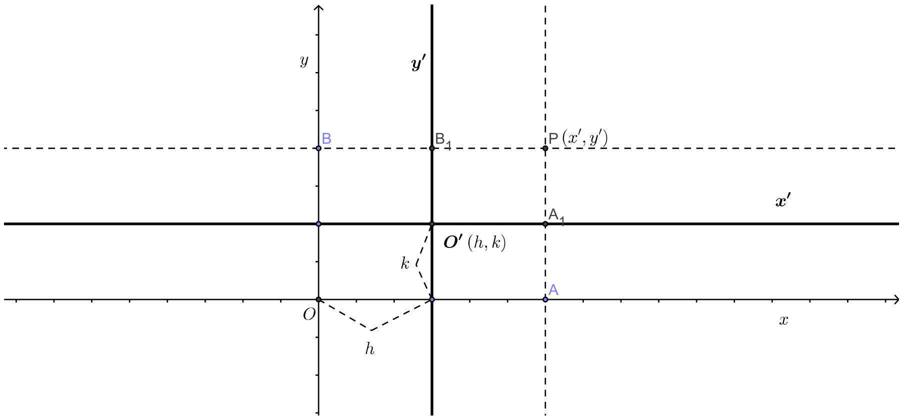


Figura 1.14: Translação de eixos

1.3.1 Translações de Parábolas

- **Eixo da parábola é paralelo ao eixo Oy**: A equação da parábola no novo sistema $x'O'y'$, é $x'^2 = 2py'$ usando as fórmulas de translação, temos a forma padrão no sistema xOy

$$(x - h)^2 = 2p(y - k) \tag{1.4}$$

Vértice: $V(h,k) \neq (0,0)$, o vértice é um ponto de interseção da parábola com o eixo de simetria. Neste caso $(O' = V)$

Foco: aqui o foco deverá ser transladado verticalmente em relação ao vértice, portanto $F\left(h,k + \dfrac{p}{2}\right)$.

Diretriz: a reta diretriz também será transladada em relação ao novo vértice e sua equação é $y = k - \dfrac{p}{2}$.

A equação 1.4 é a **equação da parábola de vértice** $V(h,k)$, com **eixo de simetria paralelo ao eixo** Oy. Desenvolvendo a equação 1.4 e isolando a variável y, obtemos:

$$\begin{aligned} x^2 - 2xh + h^2 &= 2py - 2pk \\ y &= \frac{1}{2p}x^2 - \frac{h}{p}x + \frac{h^2 + 2pk}{2p} \\ y &= ax^2 + bx + c, \text{ com } a \neq 0 \end{aligned}$$

observamos que: $a = \dfrac{1}{2p}$ e $b = -\dfrac{h}{p}$.

A equação $\boxed{y = ax^2 + bx + c}$ é a **equação explícita** da parábola.

A **Equação geral** é representada por $\boxed{ax^2 + bx + cy + d = 0}$, $a \neq 0$.

- **Eixo da parábola é paralelo ao eixo Ox**: a forma padrão no sistema xOy

$$(y - k)^2 = 2p(x - h) \tag{1.5}$$

A equação 1.5 representa a **parábola de vértice** $V(h{,}k)$ e **eixo de simetria paralelo ao eixo dos** x.

Foco: o foco deverá ser transladado horizontalmente em relação ao vértice, portanto $F\left(h + \dfrac{p}{2}{,}k\right)$.

Diretriz: estará localizada mais a esquerda ou a direita do vértice $x = h - \dfrac{p}{2}$.

De forma análoga, desenvolvendo a equação 1.5 e isolando a variável x, obtemos $\boxed{y = ax^2 + bx + c}$ que é a **equação explícita** da parábola.

A **Equação geral** é $\boxed{by^2 + cx + dy + f = 0}$, $b \neq 0$.

Exemplo 3. *Determinar as equações geral e explícita da parábola com vértice* $V(3{,}3)$ *e foco* $F(5{,}3)$.

Solução:

No plano cartesiano marcar as coordenadas do vértice e do foco. Observamos, pelo gráfico 1.15 que a equação terá a forma padrão $(y-k)^2 = 2p(x-h)$ e que a distância do vértice ao foco corresponde a duas unidades de comprimento (2 u.c.).

O parâmetro $\dfrac{p}{2} = 2 \therefore 2p = 8$.

$$\begin{aligned} (y-3)^2 &= 8(x-3) \\ y^2 - 6y + 9 &= 8x - 24 \\ y^2 - 6y - 8x + 33 &= 0 \end{aligned}$$

A equação geral é

$$y^2 - 6y - 8x + 33 = 0$$

e a equação explícita é

$$x = \frac{y^2}{8} - \frac{6}{8}y + \frac{33}{8}.$$

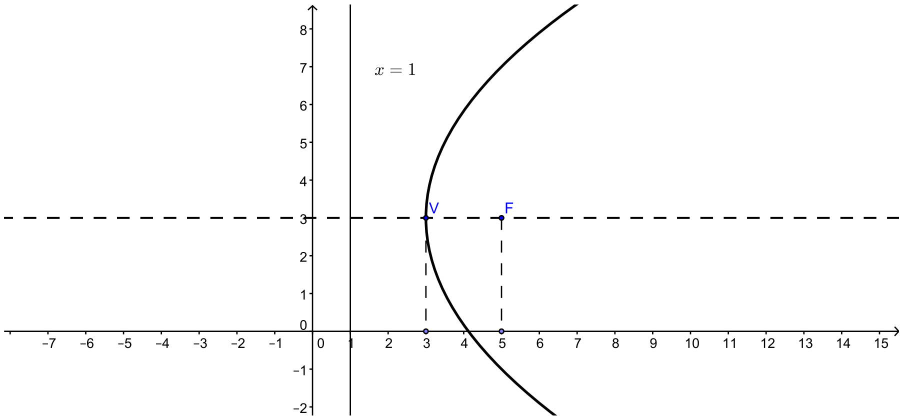


Figura 1.15: Gráfico de $y^2 - 6y - 8x + 33 = 0$

O processo de completar o quadrado: quando a equação da parábola estiver na forma $ax^2+bx+cy+d=0$ ou $by^2+cx+dy+f=0$ e precisamos reescrever nas formas padrão como 1.4 ou 1.5 utilizamos a técnica de completar o quadrado. Esse processo tem como base as formas dos produtos notáveis $(a+b)^2$ e $(a-b)^2$, através de uma simples comparação direta entre os termos. Completando o trinômio quadrado perfeito podemos reescrever a equação de alguma cônica na sua forma reduzida. Veja o próximo exemplo.

Exemplo 4. *Reescreva a equação da parábola na forma reduzida:* $y^2+2y-12x+25=0$

Solução:

A equação esta escrita na forma $by^2+cy+dx+f=0$, com $b=1$. Vamos usar a técnica de completar o quadrado para reescrever a equação na forma $(y-k)^2 = 2p(x-h)$, então

$$y^2 + 2y - 12x + 25 = 0$$

$$y^2 + 2y = 12x - 25$$

agora, realizando uma comparação direta do termo do lado direito da equação com $(a+b)^2$, temos

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

Se $a = y$, pela equação anterior $2 \cdot a \cdot b = 2y$, então

$$2 \cdot y \cdot b = 2y$$

$$b = \frac{2y}{2y} = 1$$

Se $b = 1$, então $b^2 = 1$, como temos que somar 1 ao membro a direita da igualdade da equação, para completar o trinômio quadrado, precisamos compensar somando 1 ao membro da esquerda da igualdade. Assim,

$$y^2 + 2y + 1 = 12x - 25 + 1$$
$$y^2 + 2y + 1 = 12x - 24$$

sendo assim,

$$\mathbf{(y+1)^2 = 12(x-2)}$$

Essa equação representa uma parábola com eixo de simetria paralelo ao eixo x. Concavidade voltada para direita, cujo parâmetro $p = 6$.

1.4 Equações Paramétricas da Parábola

Considerando a equação da parábola $x^2 = 2py$, cujo eixo de simetria é o dos y. A posição $P(x,y)$ de uma partícula que se move no plano xy é dada pelas equações paramétricas e pelo intervalo de variação do parâmetro.

Se fizermos $x = t$ (t é o parâmetro), e isolando a variável y na equação, temos $y = \frac{1}{2p}t^2$. Então, as **equações paramétricas** da parábola são

$$\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{1}{2p}t^2, \text{ onde } t \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1.6}$$

A Figura 1.16, corresponde a trajetória da curva $x^2 = 2y$.

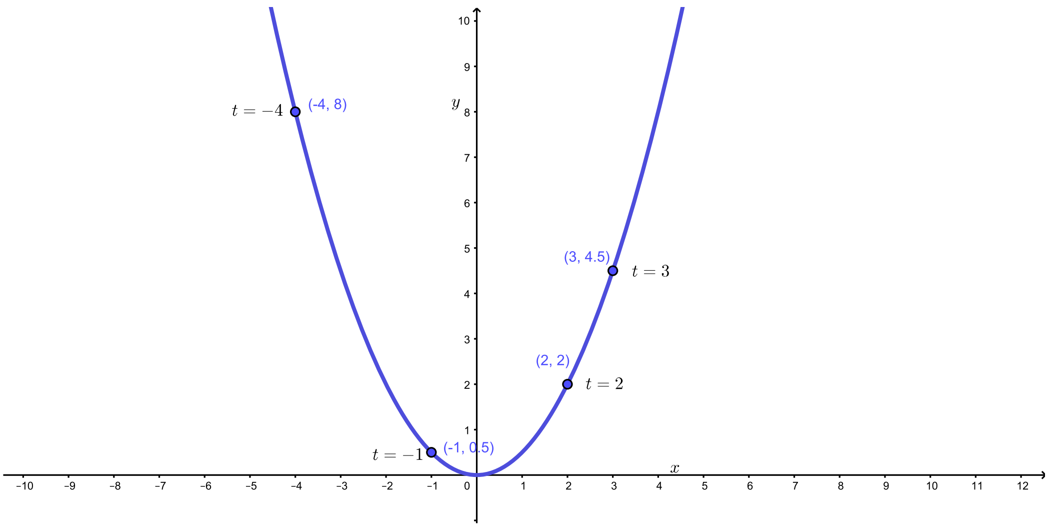


Figura 1.16: Trajetória definida por $x = t$ e $y = \dfrac{t^2}{2}$

De forma análoga, se tivermos a parábola ao longo do eixo x, sua equação reduzida é $y^2 = 2px$ e suas equações paramétricas são,

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2p}t^2 \\ y = t, \text{ onde } t \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1.7}$$

Observação: Da mesma forma, obtemos as equações paramétricas no caso de o vértice da parábola não ser a origem do sistema.

Exemplo 5. *Obter as equações paramétricas da parábola* $x^2 = \frac{1}{2}y$.

Solução:

Se fizermos $x = t$, então $y = 2t^2$ assim

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t^2, t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

correspondem as equações paramétricas da parábola $x^2 = \frac{1}{2}y$.

Exemplo 6. *Obter as equações paramétricas da parábola* $(x+2)^2 = 2(y-1)$.

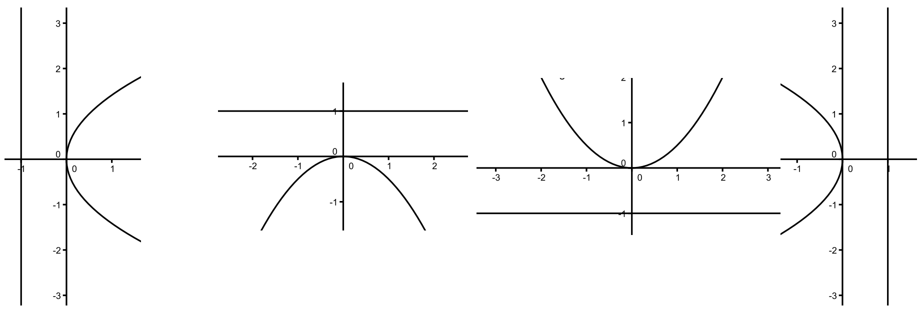
Solução:
Se fizermos $x+2 = t$, então $x = t-2$. Assim, $t^2 = 2(y-1)$ ou $t^2 = 2y-2$.
Portanto,

$$\begin{cases} x = t - 2 \\ y = 1 + \dfrac{t^2}{2}, t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

correspondem as equações paramétricas da parábola.

1.5 Agora tente resolver!

1. Associe cada representação geométrica das parábolas com as equações dadas:



( ) $x^2 = 2y$ ( ) $y^2 = 2x$ ( ) $x^2 = -2y$ ( ) $y^2 = -2x$

2. Determine o foco e a equação da diretriz de cada parábola. Esboce cada uma das parábolas. Inclua o Foco e a diretriz em seu desenho:
   (a) $y^2 = 12x$
   (b) $y = 4x^2$
   (c) $x^2 = -16y$
   (d) $x^2 + 6y = 0$
3. Represente geometricamente e obtenha uma equação da parábola que satisfaça a seguinte condição: $V(0{,}0)$, passa pelo ponto $P(-2{,}5)$ e a concavidade está voltada para cima.
4. Uma parábola tem vértice na origem e passa no ponto $P(8, -4)$ determinar a equação e seu foco se:
   (a) O eixo focal é $0x$
   (b) O eixo focal é Oy
5. Determinar a equação reduzida, o vértice, o foco, uma equação da diretriz da parábola de equação dada. Esboçar o gráfico.
   (a) $2y^2 - 5x + 8y - 7 = 0$
   (b) $2x^2 - 5y + 8x - 7 = 0$
   (c) $x^2 - 6y - 6x + 33 = 0$
6. Determinar a equação, o foco, a equação da diretriz e construir a parábola de vértice na origem $V(0{,}0)$, nos seguintes casos:
   (a) Foco: $F(0{,}4)$
   (b) Diretriz: $x = 5$
7. Obter as equações paramétricas das parábola:
   (a) $(y-2)^2 = 2(x+3)$
   (b) $y^2 - 2x + 4y = 0$
   (c) $y^2 = 12x$
   (d) $x^2 = 16y$
   (e) $(x+2)^2 = -2(y-1)$

1.6 Elipse

1.6.1 A Geometria da Elipse

A elipse é o conjunto de todos os pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos desse plano é constante. Pela Figura 1.17 os dois pontos distintos F_1 e F_2, são chamados de focos da elipse. Um ponto $P(x,y)$ pertence a elipse se, e somente se

$$|\overrightarrow{PF_1}| + |\overrightarrow{PF_2}| = 2a \tag{1.8}$$

A origem $O(0,0)$ do plano cartesiano é o centro da elipse. A distância entre F_1 e F_2 e o centro O é sempre igual e denominamos de c. Como $|\overrightarrow{F_1O}| = |\overrightarrow{F_2O}|$, a distância entre F_1 e F_2 é igual a $2c$, chamada de distância focal.

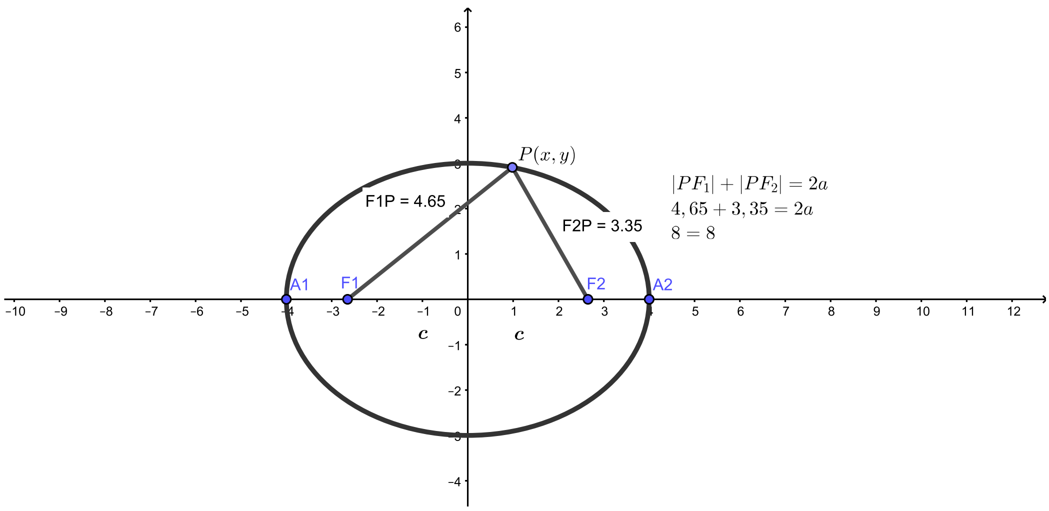


Figura 1.17: Definição de Elipse

Na Figura 1.18, a distância entre o ponto A_1 e o centro O é sempre igual a distância do ponto A_2 ao centro O. Essa distância chamamos de a, que é a constante da definição. O número a é o semieixo maior, então $|\overrightarrow{A_1A_2}|$ é igual a $2a$ chamado de eixo maior da elipse.

Como $|\overrightarrow{PF_1}| + |\overrightarrow{PF_2}|$ é maior que o comprimento de $|\overrightarrow{F_1F_2}|$, pela desigualdade triangular para o triângulo PF_1F_2, o número $2a$ é maior que $2c$.

A distância entre B_1 e B_2 ao centro O é sempre igual a b, que é o semieixo menor. O comprimento $|\overrightarrow{B_1B_2}| = 2b$ e é denominado eixo menor da elipse.

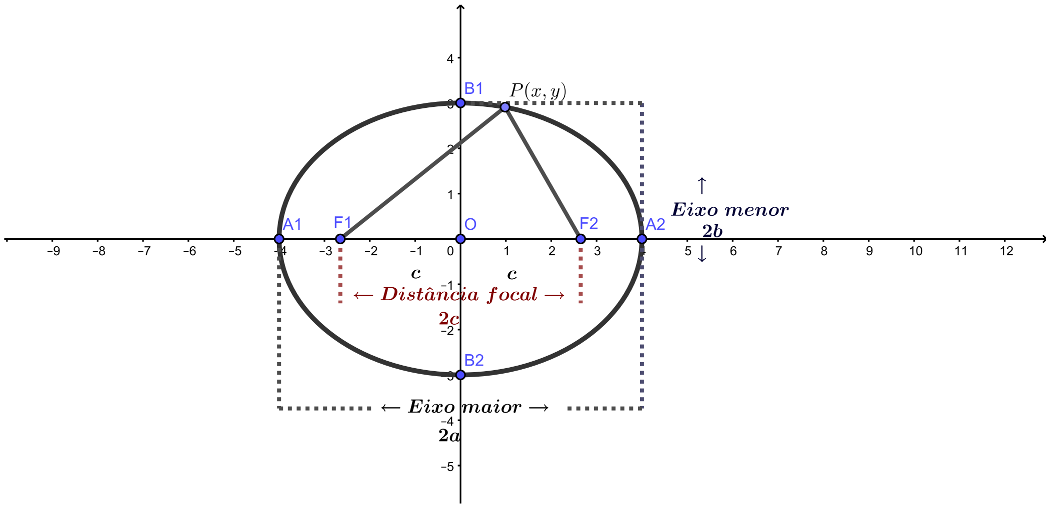


Figura 1.18: Relação entre as distâncias dos vértices da Elipse

A elipse é simétrica em relação à reta focal, que é a reta F_1F_2, a reta não focal e ao centro. Os elementos da elipse estão na Figura 1.19.

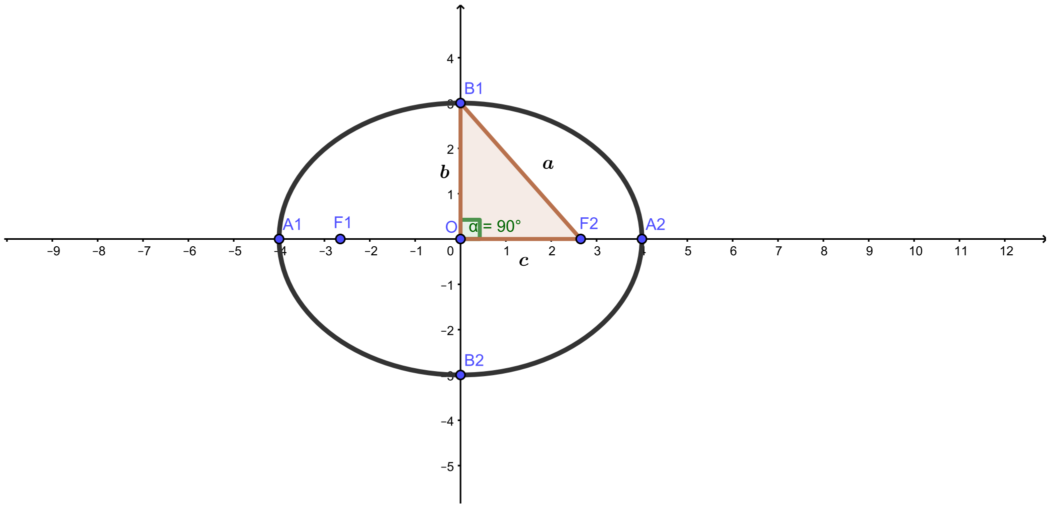


Figura 1.19: Elementos da Elipse

Elementos:

- Focos: são os pontos F_1 e F_2, que não pertencem a elipse.
- Centro: é o ponto $O(0{,}0)$, o ponto médio entre F_1 e F_2.
- Eixo maior: é o segmento A_1A_2, onde $|\overrightarrow{A_1A_2}| = 2a$, esse segmento contém os focos.

- Eixo menor: é o segmento B_1B_2, onde $|\overrightarrow{B_1B_2}| = 2b$ esse segmento é perpendicular a A_1A_2 no seu ponto médio.
- Distância focal: distância entre os focos, onde $|\overrightarrow{F_1F_2}| = 2c$.
- Vértices: são os pontos A_1, A_2, B_1, B_2 que pertencem a elipse.

1.6.2 Relação Fundamental

Na Figura 1.19, $|\overrightarrow{B_1F_2}| = a$, já que a soma das distâncias entre $|\overrightarrow{B_1F_2}|$ e $|\overrightarrow{B_1F_1}|$ é igual a $2a$, pela definição de elipse e sabendo que $|\overrightarrow{B_1F_2}| = |\overrightarrow{B_1F_1}|$.

Sendo assim, no triângulo OF_2B_1 vale a seguinte relação fundamental:

$$a^2 = b^2 + c^2 \tag{1.9}$$

Essa igualdade mostra que $b < a$ e $c < a$.

1.6.3 Excentricidade

A excentricidade está ligada a forma da elipse, existem, por exemplo, elipses alongadas as quais podemos compará-las as órbitas dos cometas.

Sabemos que alguns cometas, tem órbitas muito achatadas, é o caso do cometa Halley, sua excentricidade é de 0,97, o que faz com que o cometa quase não feche a curva elíptica. Outras elipses são mais arredondadas, que é o caso das órbitas dos planetas do nosso Sistema Solar. A excentricidade da órbita da Terra é 0,017, a de Marte 0,093. Portanto, podemos dizer que a excentricidade determina quanto achatada é a curva.

Se a excentricidade for igual a zero a curva torna-se uma circunferência onde $O = F_1 = F_2$, por outro lado, quanto mais achatada for a elipse, mais o seu valor aproxima-se de 1.

Se a excentricidade for igual a 1, a curva descreve uma parábola. Se pensarmos nas trajetórias de cometas, se sua trajetória descrever uma parábola, o cometa passaria perto do Sol, apenas uma vez, daria a volta e escaparia para sempre dos domínios do Sistema Solar, visto que a curva parabólica é aberta, ver Seção 1.2.

Chamamos de excentricidade o número real, $e = \dfrac{c}{a}$, que é a relação entre a distância focal e o tamanho do semieixo maior

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}, 0 < e < 1$$

Como $c \geq 0$ e sempre menor que a a excentricidade é um número positivo e menor que 1.

Quando os focos são muito próximos, isto é, c é muito pequeno, a elipse aproxima-se de uma circunferência. A Figura 1.34, mostra exemplos de elipses e suas excentricidades.

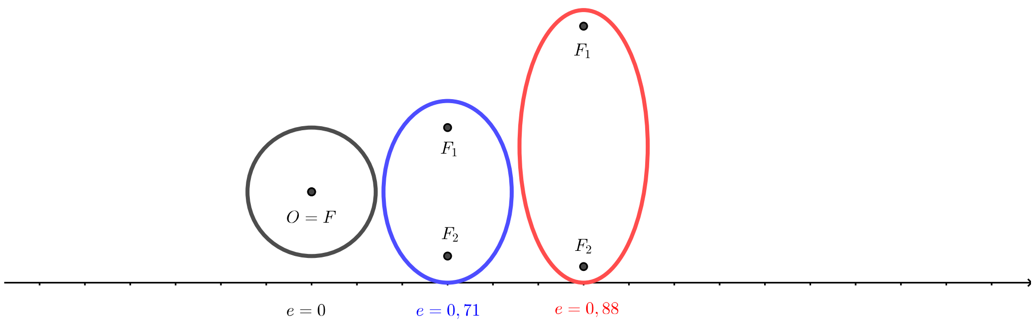


Figura 1.20: Elipses e suas excentricidades

1.6.4 Equações reduzidas

Seja a elipse de centro $O(0,0)$. Partindo da definição de elipse 1.8, temos dois casos a considerar:

- **Quando o eixo maior está sobre o eixo Ox** : Seja $P(x,y)$ um ponto qualquer na elipse de focos $F_1(-c,0)$, $F(c,0)$, com $a > c$ e $c \geq 0$.

  Por definição:

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{F_1P}| + |\overrightarrow{F_2P}| &= 2a \\
\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} &= 2a \\
\sqrt{x^2 + y^2 + 2cx + c^2} &= 2a - \sqrt{x^2 + y^2 - 2cx + c^2} \\
(\sqrt{x^2 + y^2 + 2cx + c^2})^2 &= (2a - \sqrt{x^2 + y^2 - 2cx + c^2})^2
\end{aligned}$$

desenvolvendo os quadrados de ambos os lados da igualdade,

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 + 2cx + c^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 + y^2 - 2cx + c^2} + x^2 + y^2 - 2cx + c^2 \\
4a\sqrt{x^2 + y^2 - 2cx + c^2} &= 4a^2 - 4cx \\
a\sqrt{x^2 + y^2 - 2cx + c^2} &= a^2 - cx \\
a^2(x^2 + y^2 - 2cx + c^2) &= a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 \\
a^2x^2 + a^2y^2 - 2a^2cx + a^2c^2 &= a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 \\
a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 &= a^4 - a^2c^2 \\
(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2)
\end{aligned}$$

pela relação fundamental da elipse 1.9, temos $a^2 - c^2 = b^2$, substituindo na expressão anterior

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

dividindo ambos os membros da equação por a^2b^2,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (1.10)$$

A equação (1.10) é a **Equação Reduzida da Elipse de centro na origem e eixo maior sobre o eixo** Ox, como da Figura 1.19.

- **Quando o eixo maior está sobre o eixo Oy**: Considere $P(x,y)$ um ponto qualquer na elipse de focos $F(0,-c)$, $F_2(0,c)$, a reta focal agora está sobre o eixo das ordenadas. Sendo a elipse de centro na origem $O(0,0)$ pela Figura 1.21, efetuando um procedimento análogo ao caso anterior,

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad (1.11)$$

É a **Equação Reduzida da Elipse de centro na origem e eixo maior sobre o eixo** Oy.

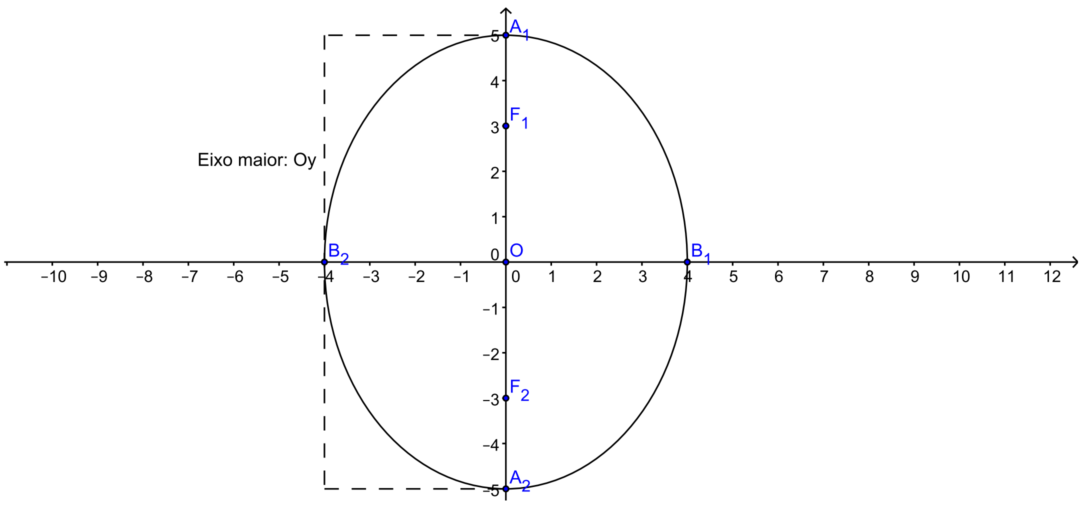


Figura 1.21: Elipse de eixo maior sobre Oy

Como $a > b$ em toda elipse, para se certificar se a elipse tem seu eixo maior sobre o eixo das abcissas ou das ordenadas, basta observar onde está o maior denominador (a^2), na equação reduzida. Se for denominador de x^2, o eixo maior está sobre Ox, caso contrário no Oy.

Exemplo 7. *Determine os focos, vértices, excentricidade e faça um esboço da elipse:* $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Solução: Pela equação centro é a Origem.
O eixo maior está sobre Ox, pois a^2 é o maior denominador de x^2:

$$a^2 = 25 \therefore a = 5$$

b^2 é o menor denominador, então o eixo menor está sobre Oy:

$$b^2 = 9 \therefore b = 3$$

Pela relação fundamental: $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = 4$
Vértices: $A_1 = (-5{,}0)$, $A_2(5{,}0)$, $B_1(0, -3)$, $B_2(0{,}3)$
Focos: $F_1(-4{,}0)$, $F_2(4{,}0)$
Excentricidade: $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} = 0{,}8$.

Dica: Para esboçar a elipse, podemos usar o desenho de um retângulo como guia, centralizado na origem e com lados paralelos aos eixos. Observe a Figura 1.22.

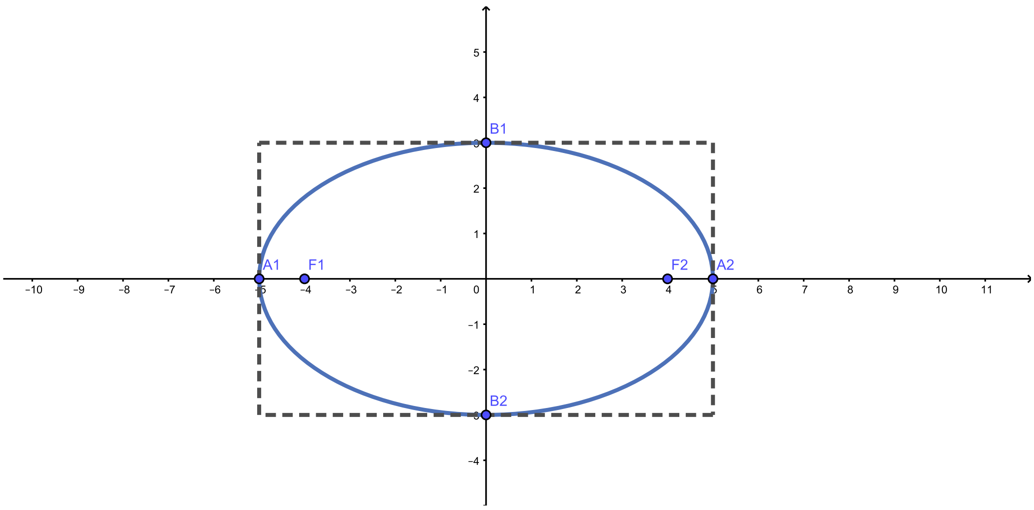


Figura 1.22: Gráfico da elipse: $x^2/25 + y^2/9 = 1$

Exemplo 8. *Obter uma equação reduzida para a elipse que satisfaz as seguintes condições: as coordenadas dos focos são* $(0{,}2)$ *e* $(0, -2)$ *e o eixo maior tem comprimento* 10.

Solução: Observe que os focos são pontos sobre o eixo Oy, portanto a reta focal está sobre esse eixo.

O eixo maior tem comprimento 10, sabemos que $|\overrightarrow{A_1A_2}| = 2a$, então

$$10 = 2a \Rightarrow a = 5$$

Assim, temos as coordenadas dos vértices interseção da elipse com o eixo Oy: $A_1(0{,}5)$ e $A_2(0,-5)$.

Pela relação fundamental $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = 21$. Portanto, a equação da elipse é

$$\frac{x^2}{21} + \frac{y^2}{25} = 1$$

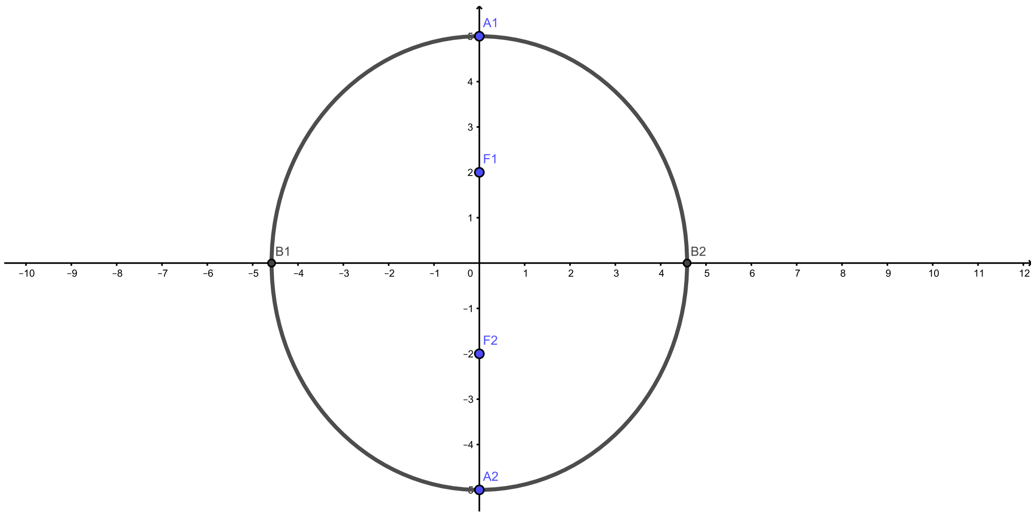


Figura 1.23: Gráfico do exemplo

1.7 Translações de eixos

1.7.1 Translações de Elipses

Quando transladamos uma elipse horizontalmente por h unidades e verticalmente por k unidades, seu centro se move de $(0{,}0)$ para (h,k). Pela Figura 1.24, observamos que a translação não modifica o comprimento dos eixos.

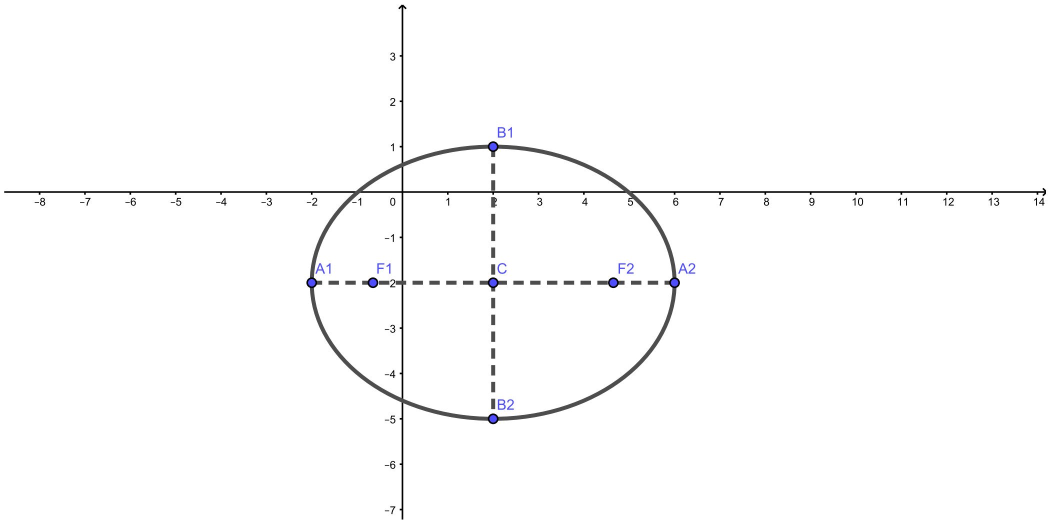


Figura 1.24: Elipse com centro em (h,k)

Para uma elipse de centro $C(h,k)$, temos duas situações:

- **Quando o eixo maior é paralelo ao eixo Ox**: Utilizando as equações de translação de eixos, da seção 1.3,

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \to x' = x - h, y' = y - k$$

obtemos a **equação da elipse de centro** $C(h,k)$ **com eixo maior paralelo ao eixo** Ox.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \tag{1.12}$$

Equação Geral: Se eliminarmos os denominadores, desenvolvermos os quadrados e ordenarmos os termos, obtemos a equação geral $\boxed{ax^2 + by^2 + cx + dy + f = 0}$ com a e b de mesmo sinal.

As coordenadas dos focos e vértices são transladados em relação ao novo centro (h,k):

Focos: $F_1(h+c,k)$, $F_2(h-c,k)$

Vértices: $A_1(h+a,k)$, $A_2(h-a,k)$, $B_1(h,k+b)$, $B_2(h,k-b)$.

- **Quando o eixo maior é paralelo ao eixo Oy**: De forma análoga:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \tag{1.13}$$

É a **equação da elipse de centro** $C(h,k)$ **e eixo maior paralelo ao eixo** Oy. Nesse caso, as coordenadas dos focos e vértices são:

Focos: $F_1(h,k+c)$, $F_2(h,k-c)$

Vértices: $A_1(h,k+a)$, $A_2(h,k-a)$, $B_1(h+b,k)$, $B_2(h-b,k)$.

Exemplo 9. *Identifique a cônica de equação* $4x^2+9y^2-16x+18y-11=0$, *seus elementos e construa o gráfico.*

Solução: Iniciamos escrevendo a equação,

$$\begin{aligned} 4x^2+9y^2-16x+18y-11 &= 0 \\ 4x^2+9y^2-16x+18y &= 11 \\ 4(x^2-4x)+9(y^2+2y) &= 11 \end{aligned}$$

onde agrupamos os termos de mesma variável e evidenciamos os fatores 4 e 9 para facilitar a construção dos trinômios quadrados nestes parênteses, assim

$$\begin{aligned} 4(x^2-4x+4)+9(y^2+2y+1) &= 11+4(4)+1(9) \\ 4(x-2)^2+9(y+1)^2 &= 36 \\ \frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{4} &= 1 \end{aligned}$$

Que é a forma padrão da elipse de centro $C(2,-1)$ e eixo maior paralelo ao eixo Ox.

$$a^2=9 \therefore a=3$$

$$b^2=4 \therefore b=2$$

Para determinar os Focos, precisamos do valor de c. Pela relação fundamental $a^2=b^2+c^2$ ou $9=4+c^2$, temos $c=\sqrt{5}$ e os focos são $F_1(2+\sqrt{5},-1)$ e $F_2(2-\sqrt{5},-1)$.

Pelo gráfico temos os vértices: $A_1(5,-1)$, $A_2(-1,-1)$, $B_1(2,-3)$, $B_2(2,1)$.

Excentricidade: $e=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

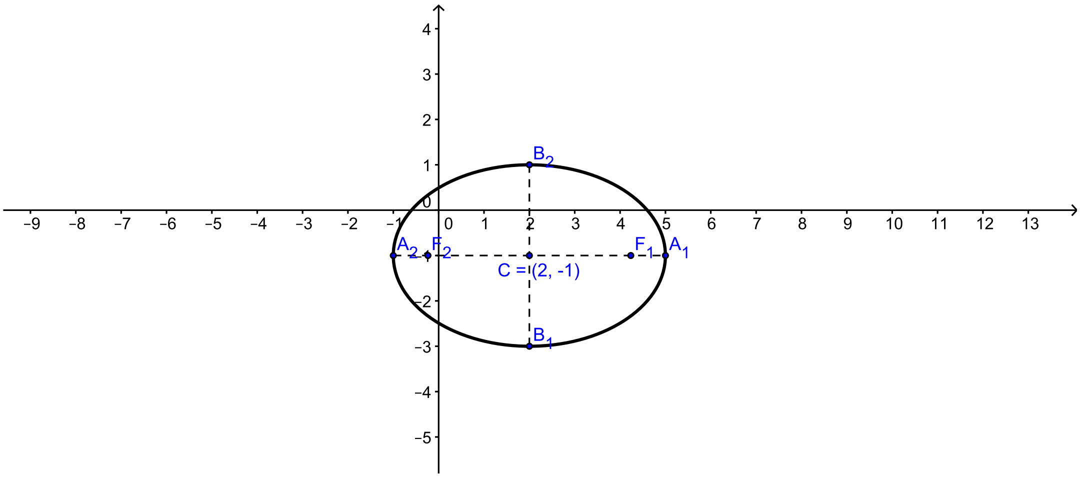


Figura 1.25: Elipse com centro em $(2, -1)$

Exemplo 10. *Determine a equação da elipse de eixo maior nos extremos* $(1, -4)$ *e* $(1,8)$ *e com comprimento do eixo menor igual a* 8*.*

Solução: A Figura 1.26 mostra os extremos do eixo maior , o eixo menor.

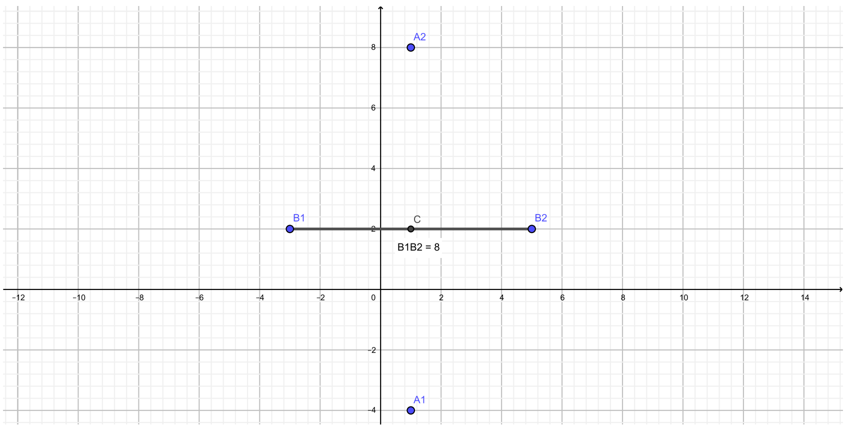


Figura 1.26: Dados do exemplo

A equação para essa elipse será $\dfrac{(x-h)^2}{b^2} + \dfrac{(y-k)^2}{a^2} = 1.$

Onde o centro está no par (1,2) do eixo maior. Os valores de a e b, são respectivamente

$$a = \frac{8-(-4)}{2} = 6, \quad b = \frac{8}{2} = 4$$

A equação que procuramos é $\dfrac{(x-1)^2}{16} + \dfrac{(y-2)^2}{36} = 1.$

1.8 Circunferência

A circunferência é o lugar geométrico dos pontos que estão equidistantes de um ponto fixo. Tal ponto fixo chama-se *centro* da circunferência e a medida da distância é o *raio*.

Um ponto P pertence à circunferência se, e somente se $|\overrightarrow{PC}| = r$, isto é,

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r \tag{1.14}$$

Se o Centro da circunferência é o ponto $C(0{,}0)$ então a equação

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{1.15}$$

representa a **equação da circunferência de centro na origem** $C(0{,}0)$, conforme 1.27.

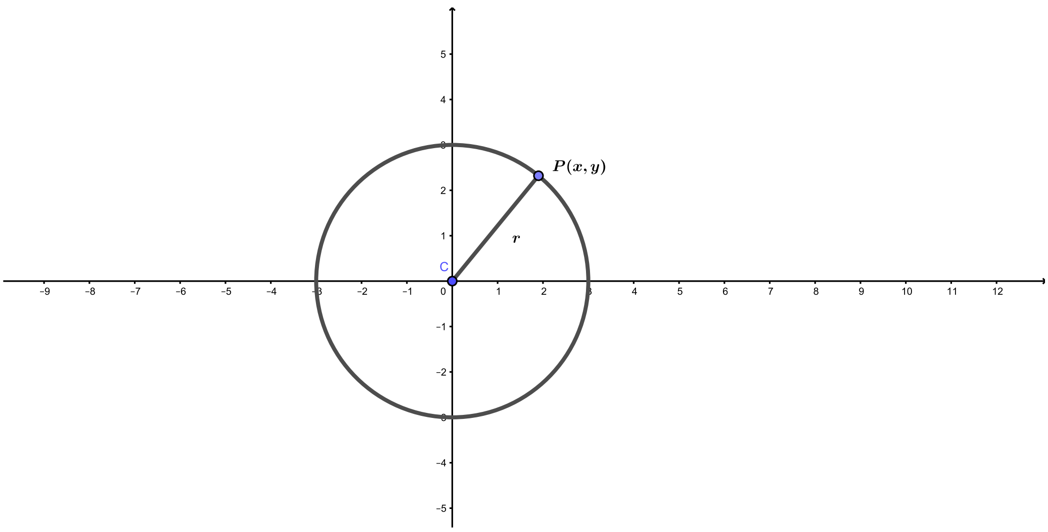


Figura 1.27: Definição de circunferência

Se a circunferência tem centro em $C(h{,}k)$ e raio r a equação é dada por:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \tag{1.16}$$

a equação (1.16) é a **equação reduzida da circunferência de centro** $C(h{,}k)$ que é satisfeita apenas para as coordenadas dos pontos que estão na circunferência, conforme a Figura 1.28.

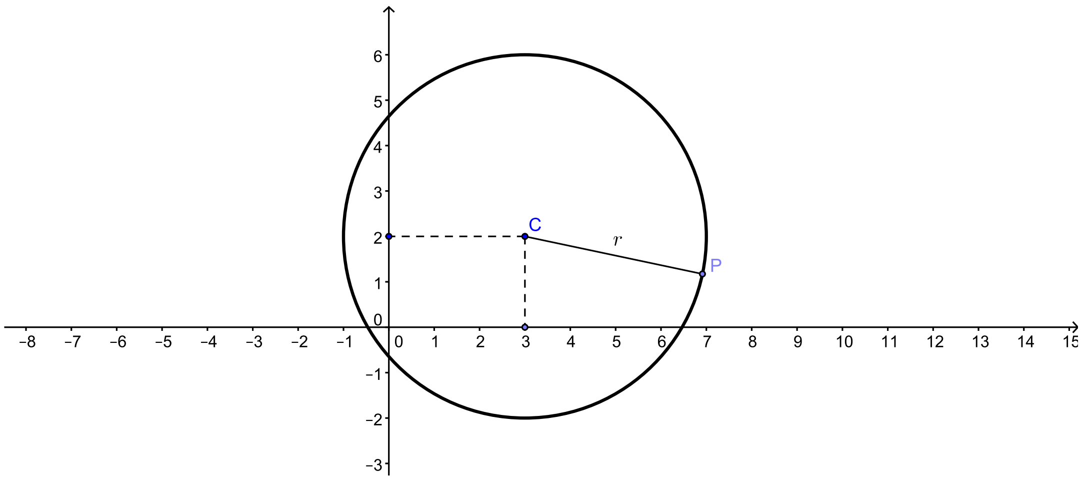


Figura 1.28: Circunferência de centro $C(h{,}k)$

Equação geral de uma equação de circunferência: Desenvolvendo a equação (1.16):

$$\begin{aligned} x^2-2hx+h^2+y^2-2ky+k^2-r^2&=0\\ x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-r^2&=0 \end{aligned} \tag{1.17}$$

A equação (1.17) é a equação geral e pode ser escrita como:

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0 \tag{1.18}$$

Com $A=-2h$, $B=-2k$, $C=h^2+k^2-r^2$.

Exemplo 11. *Encontre a equação geral da circunferência com centro $C(2{,}3)$ e raio $r=2$.*

Solução: Partindo da equação reduzida, considerando o centro $C(2{,}3)$ e o raio $r=2$:

$$(x-2)^2+(y-3)^2=2^2$$

Desenvolvendo essa equação, a equação geral da circunferência é

$$x^2+y^2-4x-6y+9=0.$$

Observação: uma equação nas variáveis x e y representa uma circunferência se, e somente se, pode ser escrita $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$, com $a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}$ e $r>0$. Os coeficientes de x^2 e y^2 devem ser iguais e não existe na equação um termo misto xy.

Posições relativas entre uma reta e uma circunferência: Para determinarmos a posição relativa entre uma reta s e uma circunferência de equação $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$, devemos:

- determinarmos o raio r e o centro C da circunferência, que pode ser realizado processo de completar quadrados;
- calcular a distância d do centro à reta dada;
- comparando a distância obtida com o raio r:
  - Se $d = r \Rightarrow$ reta **tangente** à circunferência.
  - Se $d < r \Rightarrow$ reta **secante** à circunferência.
  - Se $d > r \Rightarrow$ reta **exterior** à circunferência.
- sendo necessário determinar o ponto de interseção da curva com a reta, basta substituir a equação da reta na equação da circunferência e determinar o ponto de interseção (no caso da reta tangente) ou os pontos de interseção (no caso da reta secante). A Figura 1.29 ilustra as situações.

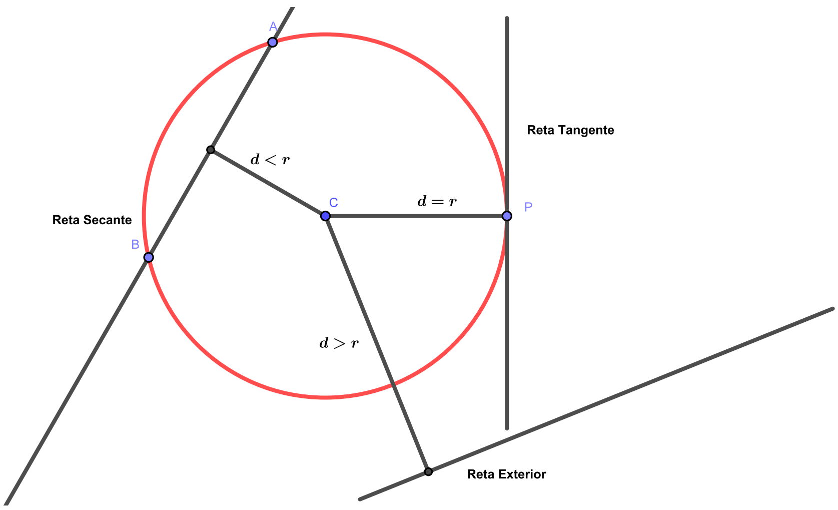


Figura 1.29: Posições relativas entre reta e circunferência

Exemplo 12. *Verifique se a reta $s : x = 5$ é tangente a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$, caso afirmativo, determine o ponto de interseção da reta com a circunferência.*

Solução: Escrevendo a equação geral na forma reduzida (completando quadrados), temos: $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 16$, portanto o raio é 4.

Calculando a distância do centro da circunferência $C(1,-2)$ à reta $x = 5$,

$$d(C,s) = 4.$$

Portanto, se $d = r$, a reta é tangente à circunferência. Para determinar o ponto de interseção substituímos $x = 5$, na equação $x^2+y^2-2x+4y-11 = 0$, assim

$$25 + y^2 - 10 + 4y - 11 = 0$$

ajustando os termos

$$y^2 + 4y + 4 = 0$$

resolvendo essa equação temos que $y = -2$. Então, $P(5, -2)$, é o ponto de interseção da reta s com a circunferência, veja o gráfico na Figura 1.30. Observe que é possível resolver o problema apenas esboçando o gráfico.

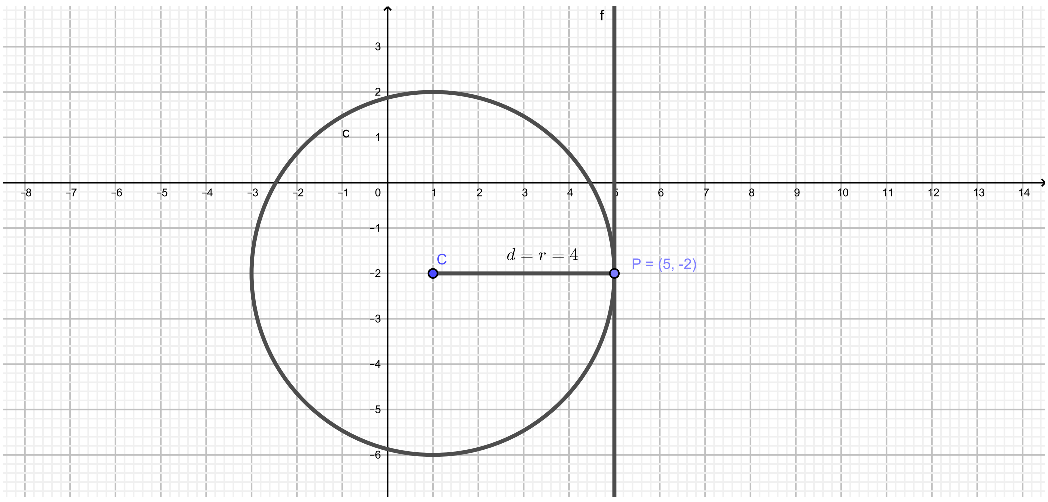


Figura 1.30: Dados do exemplo

1.9 Equações Paramétricas da Elipse e da Circunferência

Equações Paramétricas da Elipse

Para escrever as equações paramétricas da elipse traçamos uma circunferência de centro $C(0,0)$ e raio igual ao semieixo maior a da elipse, conforme a Figura 1.31.

Sabendo que a equação da elipse de eixo maior sobre o eixo x é

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Considere um ponto P que pertence a elipse e uma reta que passa por P é paralela ao eixo y interceptando a circunferência em P_1. O raio da circunferência $r = CP_1$ determina com o eixo x um ângulo θ.

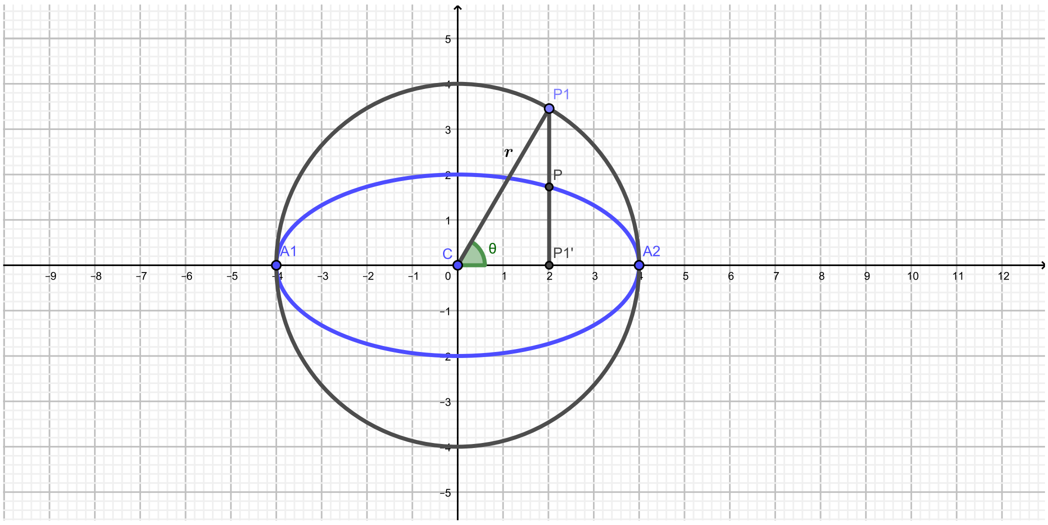


Figura 1.31: Equações paramétricas da elipse

Da trigonometria, a projeção do raio da circunferência no eixo dos x é dada por $x = a\cos\theta$ então,

$$\frac{(a\cos\theta)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1.19}$$

resolvendo a equação (1.19),

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \cos\theta^2 = \sin\theta^2$$

chegamos a $y = b\sin\theta$. Logo,

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta, \text{ onde } 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \tag{1.20}$$

são as **Equações paramétricas da elipse de eixo maior sobre** Ox. Aqui o parâmetro é o θ, para cada valor de θ corresponde apenas um ponto P da elipse, quando o parâmetro varia de 0 a 2π. O ponto parte de $(a,0)$ e descreve a curva no sentido anti-horário.

Exemplo 13. *Obter as equações paramétricas da elipse* $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

Solução: Se, $a^2 = 36 \therefore a = 6$ e $b^2 = 25 \therefore b = 5$, então

$$\begin{cases} x = 6\cos\theta \\ y = 5\sin\theta \end{cases}$$

são as equações paramétricas da elipse.

Quando o eixo maior está sobre o eixo Oy as equações paramétricas são:

$$\begin{cases} x = b\cos\theta \\ y = a\sin\theta \end{cases} \tag{1.21}$$

Quando o centro da elipse for $C(h,k)$**, temos**:

As equações paramétricas da elipse de **eixo maior paralelo ao eixo** Ox:

$$\begin{cases} x = h + a\cos\theta \\ y = k + b\sin\theta \end{cases} \tag{1.22}$$

As equações paramétricas da elipse de **eixo maior paralelo ao eixo** Oy:

$$\begin{cases} x = h + b\cos\theta \\ y = k + a\sin\theta \end{cases} \tag{1.23}$$

Exemplo 14. *Obter as equações paramétricas da elipse* $9x^2 + 4y^2 - 54x + 6y + 61 = 0$*.*

Solução: A equação acima pode ser escrita como:

$$\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$$

portanto, é uma elipse com eixo maior paralelo ao eixo y. Então, sua equação paramétrica é:

$$\begin{cases} x = 3 + 2\cos\theta \\ y = -2 + 3\sin\theta. \end{cases}$$

Equações Paramétricas da Circunferência Considerando a equação: $x^2 + y^2 = r^2$, com centro na origem. Se fizermos θ percorrer todos valores do intervalo $[0,2\pi)$, temos a seguinte equação,

$$\begin{cases} x = rcos\theta \\ y = rsin\theta. \end{cases} \tag{1.24}$$

Se o centro da circunferência for $C(h,k)$, as equações paramétrica são

$$\begin{cases} x = h + rcos\theta \\ y = k + rsin\theta. \end{cases} \tag{1.25}$$

1.10 Agora tente resolver!

1. Escreva cada equação na forma padrão, represente geometricamente cada uma das elipses com todos seus elementos e escreva as equações paramétricas.
   (a) $16x^2 + 25y^2 = 400$
   (b) $2x^2 + y^2 = 2$
   (c) $3x^2 + 2y^2 = 6$
2. Determinar os vértices, os focos, as extremidades do eixo maior e menor e construir a elipse: $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{25} = 1$.
3. Determinar a elipse de centro na origem e
   (a) Eixo maior igual a 8, semi eixo menor igual a 2 e eixo focal $y = 0$.
   (b) Distância focal igual a 8, eixo maior igual a 12 e eixo focal $x = 0$.
4. Sabendo que os focos de uma elipse são $F_1(0,\sqrt{3})$ e $F_2(0,-\sqrt{3})$ e a excentricidade $e = \dfrac{1}{2}$, determine sua equação.
5. Se $A(0,3)$ e $P(1.67,-2)$ são pontos de uma elipse cujos focos são $F_1(0,2)$ e $F_2(0,-2)$, calcule a área do triângulo PF_1F_2.
6. Identifique cada uma das cônicas abaixo, determine todos os seus elementos e escreva as equações paramétricas de cada uma delas:
   (a) $4x^2 + 9y^2 - 24x - 36y - 252 = 0$
   (b) $x^2 + 4x + y^2 = 12$
   (c) $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 25$
   (d) $x^2 + y^2 = 9$
7. Dadas as equações paramétricas a seguir, determine as equações reduzidas e identifique cada curva:
   (a) $x = 5cos\theta$, $y = 5sen\theta$
   (b) $x = cos\theta$, $y = 3sen\theta$
   (c) $x = 2 + 4cos\theta$, $y = 3 + 2sen\theta$.

1.11 Hipérbole

1.11.1 A Geometria da Hipérbole

A Hipérbole é o conjunto de todos os pontos de um plano cuja diferença das distâncias, em valor absoluto, a dois pontos fixos desse plano é uma constante. Os pontos fixos são os focos da hipérbole. Assim, todos os pontos P do plano que satisfazem a Equação 1.26 representam uma hipérbole,

$$\|\overrightarrow{PF_1}| - |\overrightarrow{PF_2}\| = 2a. \tag{1.26}$$

A Figura 1.32, mostra uma hipérbole, com centro na origem, eixo focal sobre o eixo x, pois os focos estão sobre esse eixo. Os vértices A_1 e A_2 são pontos que pertencem aos ramos da hipérbole interseção com o eixo focal. A hipérbole é a única que possui dois ramos, resultantes da interseção do cone de duas folhas com um plano paralelo ao eixo de simetria do cone.

Na hipérbole os focos estão mais distantes do centro, portanto, $c > a$. Como a hipérbole tem dois ramos, para um ponto P sobre um dos lados da hipérbole, por exemplo, no direito, temos $PF_1 - PF_2 = 2a$. Sobre o outro lado $PF_2 - PF_1 = 2a$, então $d(P,F_1) - d(P,F_2) = \pm 2$.

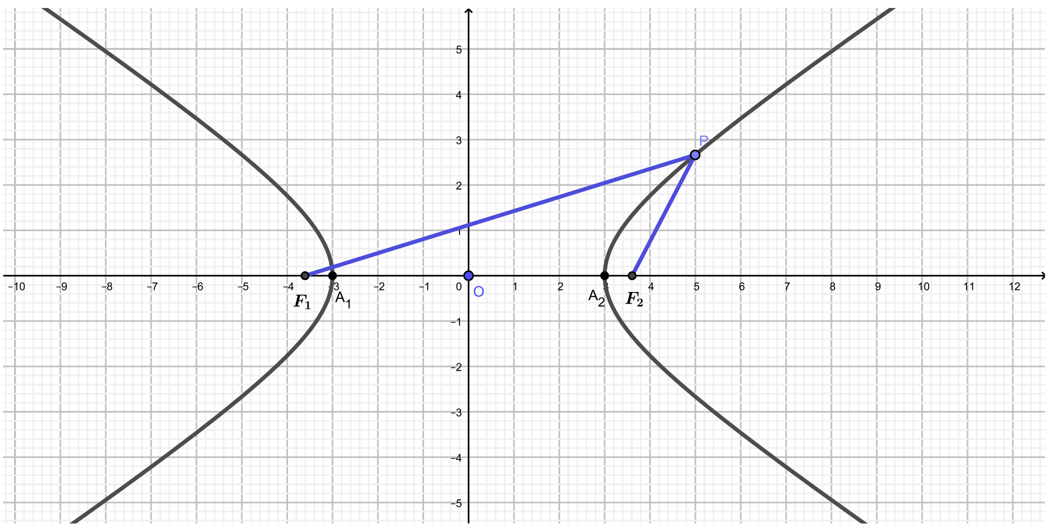


Figura 1.32: Estrutura da Hipérbole

Com relação a simetria, essa curva é simétrica em relação ao eixo focal e a reta perpendicular ao eixo focal, passando pelo centro. Pela Figura 1.33, fica claro que, o comprimento $|\overrightarrow{A_1F_1}|$ é igual a $|\overrightarrow{A_2F_2}|$.

Elementos:

- Focos: os pontos F_1 e F_2, que não pertencem a hipérbole.

- Distância focal: distância entre os focos, onde $|\overrightarrow{F_1F_2}| = 2c$.
- Centro: é o ponto $O(0,0)$, e corresponde ao ponto médio entre F_1 e F_2.
- Eixo real ou transverso: é o segmento A_1A_2, onde $|\overrightarrow{A_1A_2}| = 2a$, A_1 e A_2 são interseções dos ramos da hipérbole com o eixo focal.
- Eixo imaginário ou conjugado: é o segmento B_1B_2, onde $|\overrightarrow{B_1B_2}| = 2b$ esse segmento é perpendicular ao eixo focal, passando pelo centro.
- Assíntotas: retas que contém as diagonais do retângulo fundamental da hipérbole, passando pelo centro da hipérbole, veremos com mais detalhes na seção 1.11.5.

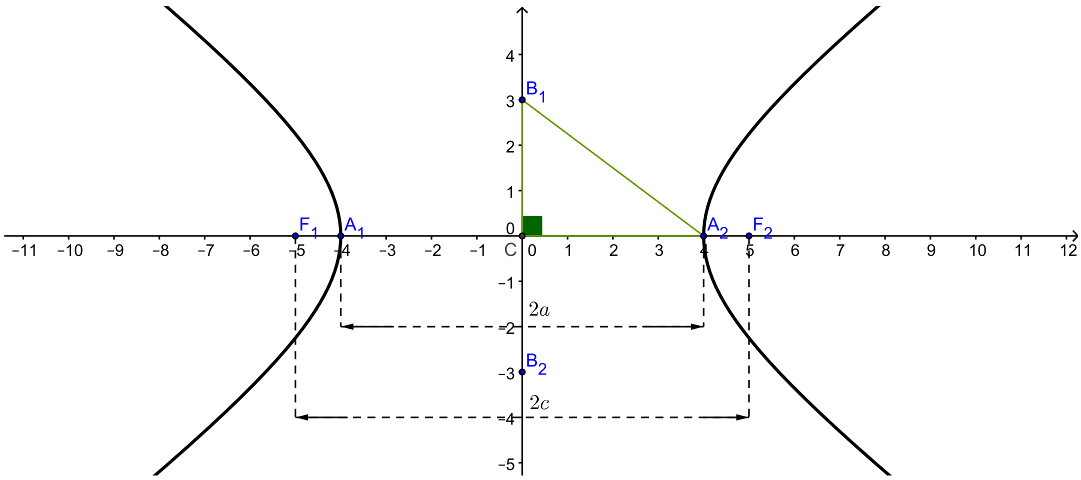


Figura 1.33: Elementos da Hipérbole

1.11.2 Relação Fundamental

Do triângulo retângulo CA_2B_1, temos

$$c^2 = a^2 + b^2 \tag{1.27}$$

Observe que $c > b > 0$ e $c > a > 0$.

1.11.3 Excentricidade

A excentricidade da hipérbole é $e = \dfrac{c}{a}$, onde a é o semieixo transverso e c é a distância do centro a um dos focos. Como $c > a$, o valor da excentricidade é maior que 1. A excentricidade está relacionada com a abertura dos ramos da hipérbole. Quanto maior a excentricidade, maior será a abertura. Observem as Figuras 1.34 e 1.35.

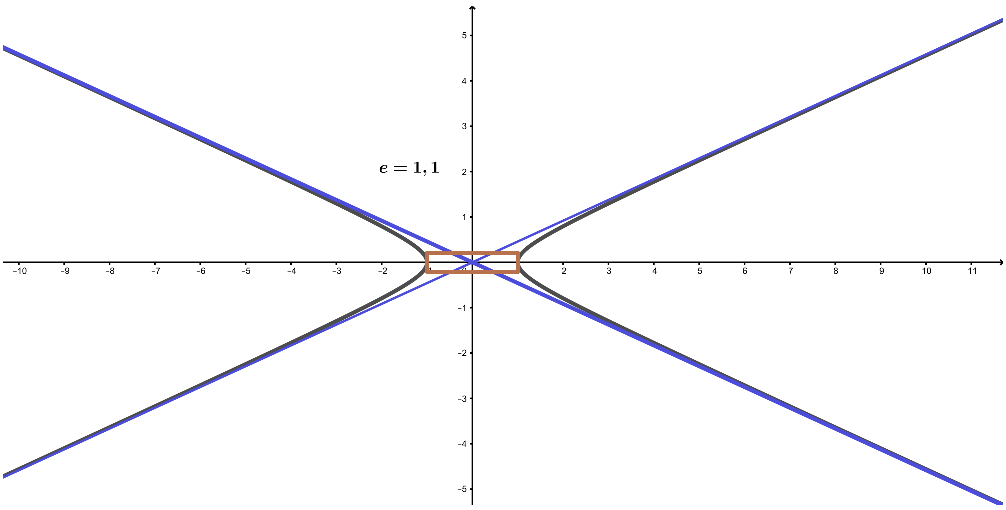


Figura 1.34: Excentricidade da hipérbole $e = 1$

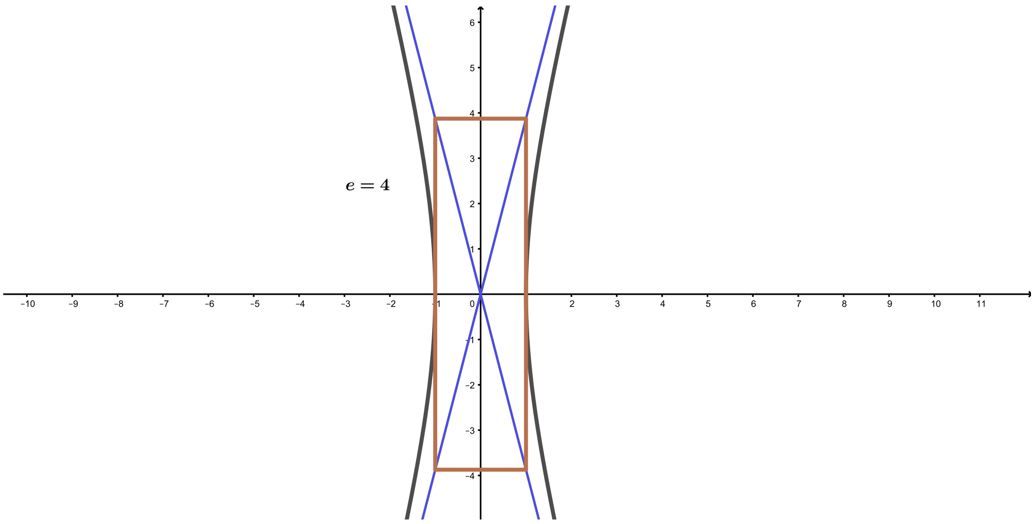


Figura 1.35: Excentricidade da hiperbole $e = 4$

1.11.4 Equações Reduzidas

Partindo da definição 1.26, considere dois pontos no plano distintos, nomeados de F_1 e F_2 tal que a distância $d(F_1,F_2) = 2c$. E um número real a tal que $2a < 2c$, onde $2a$ é a constante da definição. Assim, temos dois casos a considerar:

- **Quando o eixo real está sobre o eixo Ox** : Seja $P(x,y)$ um ponto qualquer na hipérbole de focos $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$, com $c > a$ e $c \geq 0$.

Pela definição 1.26

$$\begin{aligned}
|\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}-\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}| &= 2a\\
\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}-\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} &= \pm 2a\\
\sqrt{(x+c)^2+y^2} &= \pm 2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}
\end{aligned}$$

De forma análoga a dedução da equação da elipse, queremos chegar a uma equação equivalente a esta livre de radicais. Elevamos ao quadrado ambos os membros, reagrupamos os termos e elevamos ao quadrado novamente para obtermos,

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$$

Pela relação fundamental da hipérbole, temos $b^2=c^2-a^2$, então $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$, que é normalmente escrito como:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{1.28}$$

A equação 1.28 é a **Equação Reduzida da Hipérbole de centro na origem e eixo transverso (ou real) sobre o eixo Ox**, como a Figura 1.36.

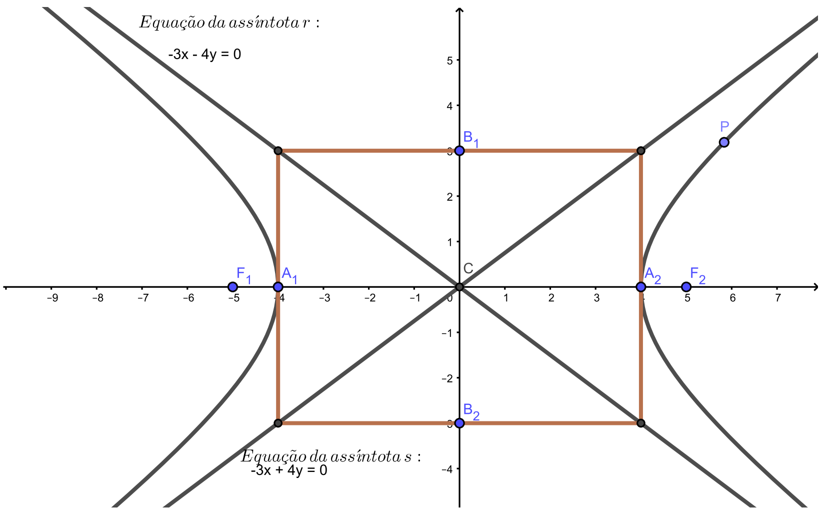


Figura 1.36: Hipérbole de eixo transverso sobre o eixo Ox

Dica: A hipérbole pode ser esboçada com o desenho de um retângulo fundamental centralizado na origem e lados paralelos aos eixos coordenados. As retas r e s que contém as diagonais do retângulo são as assíntotas da hipérbole.

- **O eixo real está sobre o eixo Oy**: Seja $P(x,y)$ um ponto qualquer na hipérbole de focos $F_1(0,c)$, $F_2(0,-c)$, com $c > a$ e $c \geq 0$. Pela definição 1.26, a hipérbole com centro na origem e eixo vertical y como seu eixo focal tem a seguinte equação:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1. \tag{1.29}$$

A equação 1.29 é a **Equação Reduzida da Hipérbole de centro na origem e eixo transverso (ou real) sobre o eixo** Oy, como a Figura 1.37.

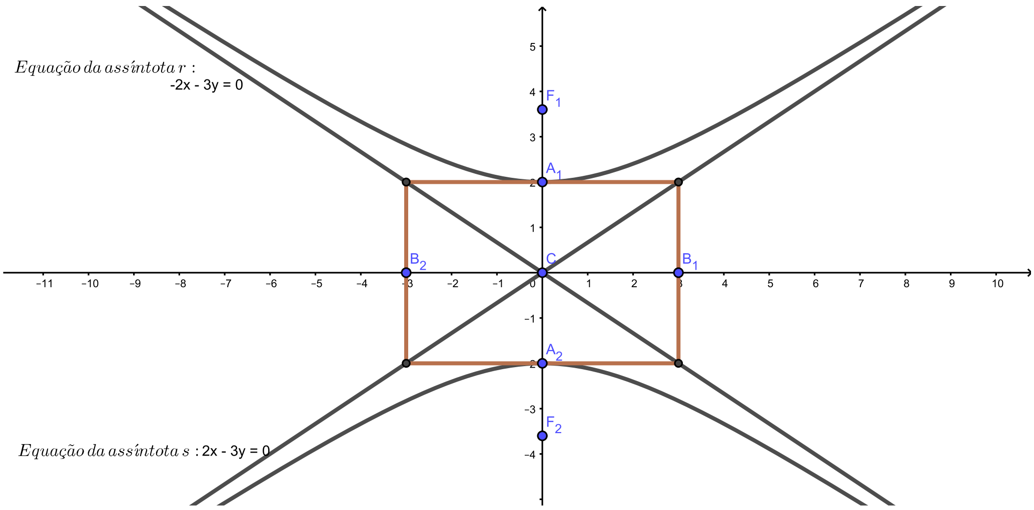


Figura 1.37: Hipérbole de eixo transverso sobre o eixo Oy

Observação: Compare as equações 1.28 e 1.29, o termo com sinal positivo no primeiro membro da equação reduzida indica o eixo que contém os focos e o denominador desse termo, em qualquer dos casos, é a^2. Diferente da elipse, não nos preocupamos com o maior denominador, pois aqui, o valor de a pode ser maior, menor ou igual a b.

1.11.5 Assíntotas da Hipérbole

Os retângulos das Figuras 1.36 e 1.37, são chamados de retângulos fundamentais da hipérbole, que tem diagonais contidas nas retas,

$$y = \frac{b}{a}x, \; y = -\frac{b}{a}x \tag{1.30}$$

que são as assíntotas da hipérbole, no caso do eixo transverso sobre o eixo x, Figura 1.36. Elas fornecem uma orientação de que precisamos para desenhar as hipérboles. Lembrando que as equações das assíntotas na forma reduzida, são do tipo $y = mx$, sendo m a declividade da reta. Para determinar as equações das assíntotas, quando eixo real está sobre o eixo x, podemos substituir o 1 por zero do lado direito da equação:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \to \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \to y = \pm\frac{b}{a}x$$

De forma análoga, quando eixo transverso está sobre o eixo y: $y = \frac{a}{b}x$ e $y = -\frac{a}{b}x$, são as respectivas equações das assíntotas.

Exemplo 15. *Escreva a equação na forma padrão e determine o centro, os vértices e focos da hipérbole:* $16x^2 - 9y^2 + 144 = 0$.

Solução: Escrevendo a equação na forma padrão temos:

$$\begin{aligned} 16x^2 - 9y^2 &= -144 \\ \frac{x^2}{-9} - \frac{y^2}{-16} &= 1 \\ \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} &= 1 \end{aligned}$$

Que é a equação padrão para uma hipérbole de eixo transverso sobre o eixo y, com centro $C(0{,}0)$. Para obter os vértices A_1 e A_2, fazendo $x = 0$, temos

$$\frac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow y^2 = 16$$

logo, $A_1(0{,}4)$ e $A_2(0,-4)$. Da mesma forma, se $y = 0$, temos

$$-\frac{x^2}{9} = 1 \Rightarrow x^2 = -9$$

que é uma equação impossível no conjunto dos reais. Então, a curva não corta o eixo dos x. Pela relação fundamental: $c^2 = a^2 + b^2$, temos o semieixo focal,

$$c^2 = 16 + 9$$

$$c^2 = 25$$

$$c = 5.$$

Portanto, $F_1(0{,}5)$ e $F_2(0,-5)$. Excentricidade $c = \frac{5}{4}$. A Figura 1.38 apresenta o gráfico da hipérbole.

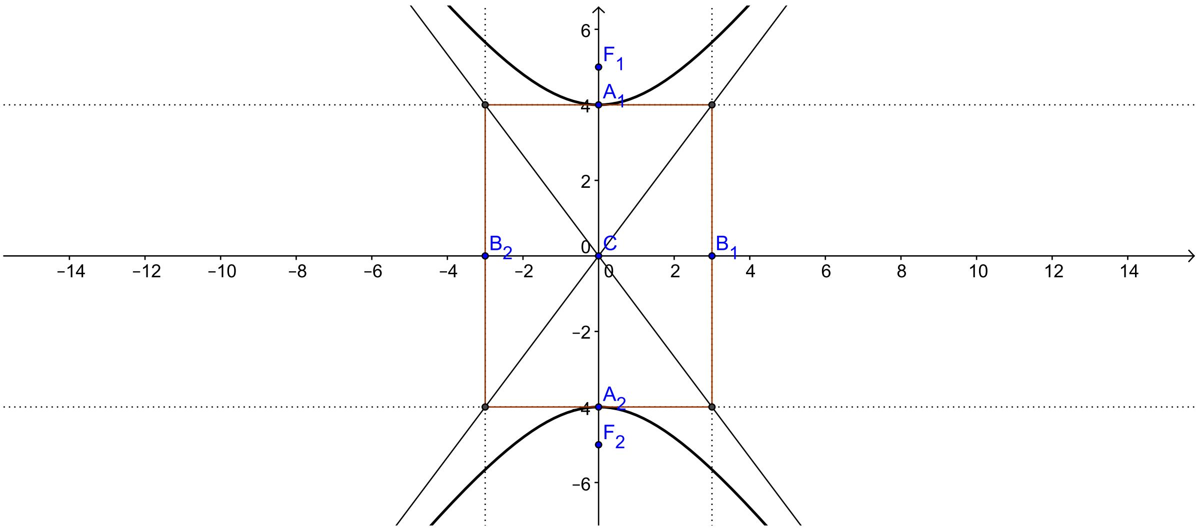


Figura 1.38: Hipérbole de equação: $16x^2 - 9y^2 + 144 = 0$

Exemplo 16. *Determine a equação reduzida, os vértices e equações das assíntotas da hipérbole de centro na origem, eixo transverso* 8 *e um dos focos em* $(0, -5)$*. Esboçar o gráfico.*

Solução: Se o eixo transverso mede 8, como $|\overrightarrow{A_1A_2}| = 2a$, então

$$2a = 8 \therefore a = 4$$

Com um dos focos em $(0, -5)$ temos: $c = 5$. Pela relação fundamental da hipérbole $c^2 = a^2 + b^2$, determinamos b

$$b^2 = 25 - 16$$

$$b^2 = 9.$$

Assim, a equação reduzida da hipérbole é

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1.$$

As equações das assíntotas, são $y = \dfrac{4}{3}x$ e $y = -\dfrac{4}{3}x$.

Gráfico:

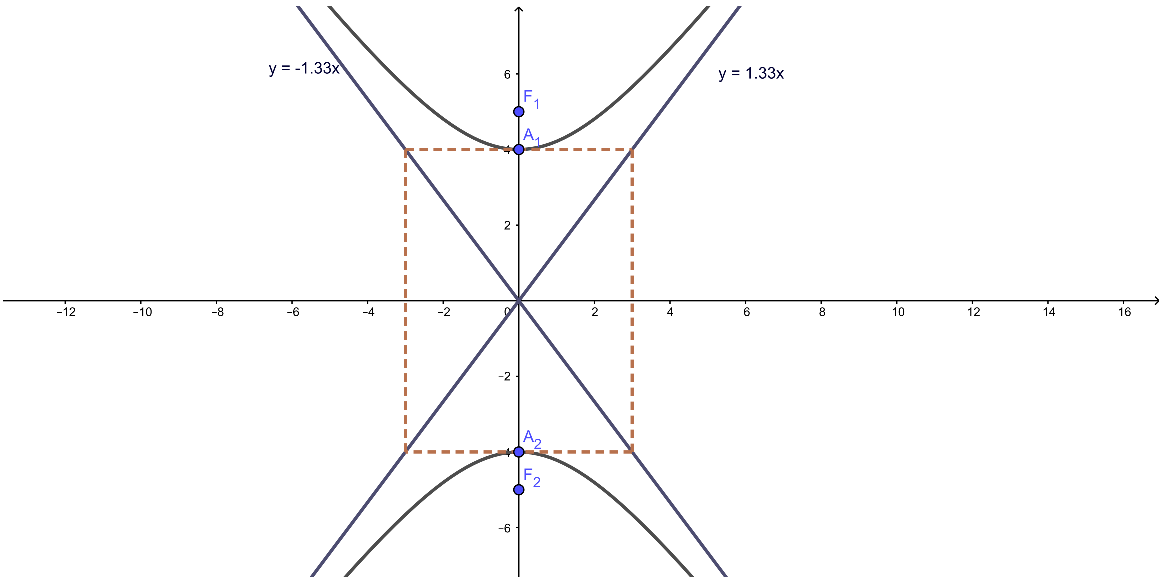


Figura 1.39: Hipérbole de equação: $y^2/16 - x^2/9 = 1$

1.12 Translações de eixos

1.12.1 Translações de Hipérboles

Quando transladamos uma hipérbole horizontalmente por h unidades e verticalmente por k unidades, seu centro se move de (0,0) para (h,k). Pela Figura 1.40, observamos que a translação não modifica o comprimento dos eixos.

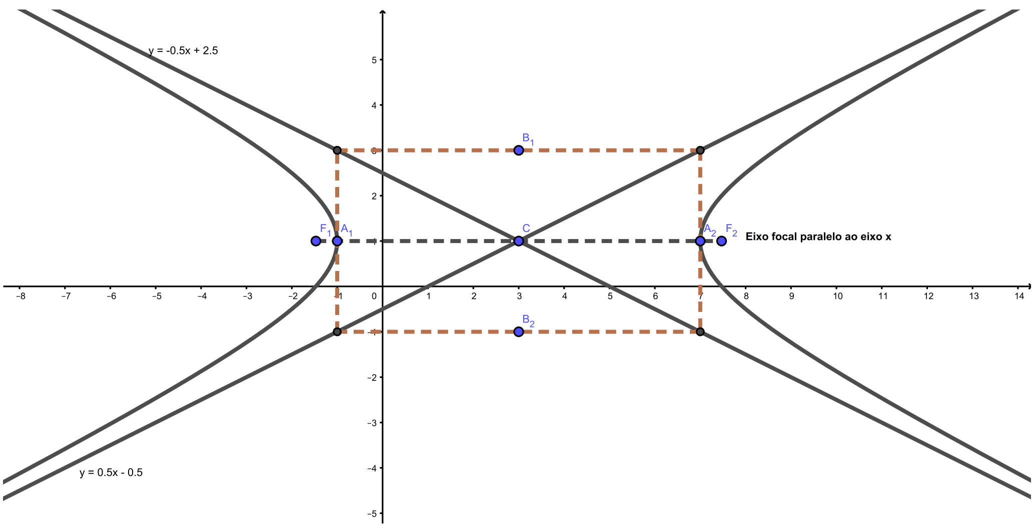


Figura 1.40: Hipérbole com centro $C(h,k)$

Utilizando as equações de translação de eixos, da seção 1.3. Temos dois casos a considerar:

- **Quando o eixo transverso (ou real) é paralelo ao eixo Ox**:

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1 \rightarrow x' = x - h \text{ e } y' = y - k \rightarrow$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \tag{1.31}$$

  obtemos a **equação da hipérbole de centro** $C(h,k)$ **com eixo transverso paralelo ao eixo** Ox.

  Equação Geral: Se eliminarmos os denominadores, desenvolvermos os quadrados e ordenarmos os termos, obtemos a equação geral
  $\boxed{ax^2 + by^2 + cx + dy + f = 0}$ com a e b de sinais contrários.

  As coordenadas dos focos e vértices são transladados em relação ao novo centro (h,k):
  Focos: $F_1(h+c,k)$, $F_2(h-c,k)$

  Vértices: $A_1(h+a,k)$, $A_2(h-a,k)$

  Assíntotas: $y = \pm\frac{b}{a}(x-h) + k$

- **Quando o eixo transverso (ou real) é paralelo ao eixo Oy**: De forma análoga,

$$\frac{y'^2}{a^2} - \frac{x'^2}{b^2} = 1 \rightarrow x' = x - h \text{ e } y' = y - k \rightarrow$$

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \tag{1.32}$$

  obtemos a **equação da hipérbole de centro** $C(h,k)$ **com eixo transverso paralelo ao eixo** Oy.

  As coordenadas dos focos e vértices são transladados em relação ao novo centro (h,k):
  Focos: $F_1(h,k+c)$, $F_2(h,k-c)$

  Vértices: $A_1(h,k+a)$, $A_2(h,k-a)$

  Assíntotas: $y = \pm\frac{a}{b}(x-h) + k$

Exemplo 17. *Identifique a cônica de equação* $25x^2 - 36y^2 - 100x - 72y - 836 = 0$*, seus elementos e faça um esboço do gráfico.*

Solução: Para escrever a equação na forma reduzida, agrupamos os termos de mesma variável e evidenciamos os fatores 25 e 36 para facilitar a construção dos trinômios, assim

$$\begin{aligned}
25x^2 - 36y^2 - 100x - 72y - 836 &= 0\\
25(x^2 - 4x) - 36(y^2 + 2y) &= 836\\
25(x^2 - 4x + 4) - 36(y^2 + 2y + 1) &= 836 + 100 - 36\\
25(x^2 - 4x + 4) - 36(y^2 - 2y + 1) &= 900\\
\frac{(x-2)^2}{36} - \frac{(y+1)^2}{25} &= 1
\end{aligned}$$

Que é a forma padrão da hipérbole de centro $C(2, -1)$ e eixo transverso paralelo ao eixo Ox. Pela relação fundamental $c^2 = a^2 + b^2$ ou $c^2 = 36 + 25$, temos $c = \sqrt{61}$ e os focos são $F_1(2 + \sqrt{61}, -1)$ e $F_2(2 - \sqrt{61}, -1)$.

Pelo gráfico temos os vértices: $A_1(8, -1)$, $A_2(-4, -1)$.

Excentricidade: $e = \dfrac{\sqrt{61}}{6}$.

Assíntotas: $y = \dfrac{5}{6}(x-2) - 1$ e $y = -\dfrac{5}{6}(x-2) - 1$.

Representação geométrica:

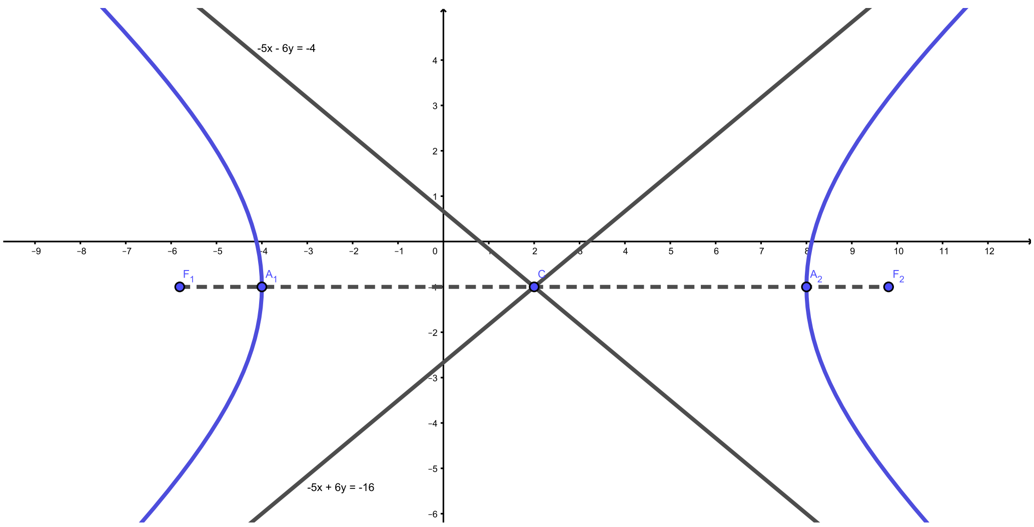


Figura 1.41: Hipérbole de equação: $\dfrac{(x-2)^2}{36} - \dfrac{(y+1)^2}{25} = 1$

1.12.2 Equações Paramétricas da Hipérbole

Para obter as equações paramétricas da hipérbole, consideremos a equação da hipérbole de eixo transverso sobre o eixo Ox com centro $C(0,0)$:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Escrevendo essa equação como, $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$, deixando os quadrados em evidência, significa dizer que $\frac{x}{a}$ e $\frac{y}{b}$ são números reais cuja diferença de seus quadrados é sempre igual a 1.

Uma relação auxiliar da trigonometria conhecida é

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1,$$

dividindo ambos os membros por $\cos^2(\theta)$, temos $\left(\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}\right)^2 + 1 = \left(\frac{1}{\cos(\theta)}\right)^2$.

Portanto, $\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \tan(\theta)$ e $\frac{1}{\cos(\theta)} = \sec(\theta)$, então substituindo na equação anterior podemos escrever $\sec^2(x) - \tan^2(x) = 1$.

Agora podemos comparar esse resultado com a equação da hipérbole,

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} = \sec(\theta) \to x = a\sec(\theta) \\[2ex] \dfrac{y}{b} = \tan(\theta) \to y = b\tan(\theta) \end{cases}$$

onde $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $\theta \neq \{\pi/2, 3\pi/2\}$. Assim, as equações paramétricas da hipérbole de eixo transverso sobre o eixo Ox são:

$$\begin{cases} x = a\sec(\theta) \\ y = b\tan(\theta) \end{cases} \tag{1.33}$$

Quando o eixo real está sobre o eixo Oy as equações paramétricas são:

$$\begin{cases} x = b\tan(\theta) \\ y = a\sec(\theta) \end{cases} \tag{1.34}$$

Quando o centro da elipse for $C(h,k)$, temos:
Para o eixo real paralelo ao eixo Ox:

$$\begin{cases} x = h + a\sec(\theta) \\ y = k + b\tan(\theta) \end{cases} \tag{1.35}$$

Para o eixo real paralelo ao eixo Oy :

$$\begin{cases} x = h + b\tan(\theta) \\ y = k + a\sec(\theta) \end{cases} \tag{1.36}$$

Exemplo 18. *Determinar a equação reduzida, a equação geral e as equações paramétricas da hipérbole de centro em $C(4,-2)$, eixo transverso mede 8, é paralelo ao eixo y e eixo imaginário mede 4.*

Solução: Temos que o centro é $C(4,-2)$, $2a = 8 \therefore a = 4$ e $2b = 4 \therefore b = 2$.

Se a hipérbole tem eixo transverso paralelo ao eixo y, significa que o eixo focal está sobre esse eixo. Então a equação da hipérbole é do tipo: $\dfrac{(y-k)^2}{a^2} - \dfrac{(x-h)^2}{b^2} = 1$, assim

$$\frac{(y+2)^2}{16} - \frac{(x-4)^2}{4} = 1.$$

A equação geral é

$$\frac{(y^2+4y+4) - 4(x^2-8x+16)}{16} = 1$$

$$y^2 + 4y + 4 - 4x^2 + 32x - 64 = 16$$

$$y^2 - 4x^2 + 32x + 4y - 76 = 0$$

As equações paramétricas são

$$\begin{cases} x = 4 + 2\tan(\theta) \\ y = -2 + 4\sec(\theta) \end{cases}$$

Gráfico:

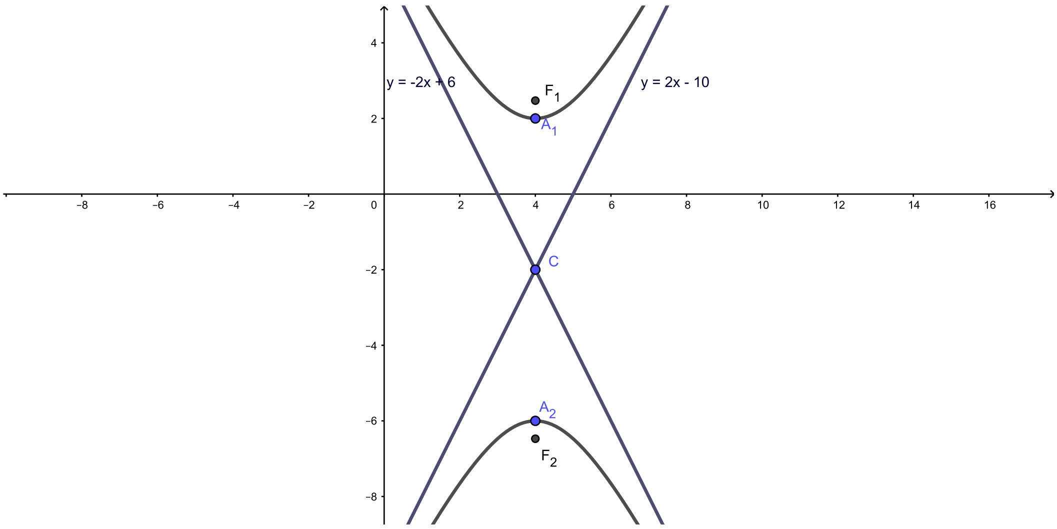


Figura 1.42: Hipérbole de equação: $y^2 - 4x^2 + 32x + 4y - 76 = 0$

1.12.3 Agora tente resolver!

1. Uma hipérbole tem centro na origem e eixo imaginário igual a 8. Sabendo-se que um foco é (0,-5), determinar sua equação, as equações das assíntotas e sua excentricidade.

2. Achar a equação de uma hipérbole de centro na origem e:

   (a) Eixo focal sobre o eixo x, eixo real $2a = 10$, eixo imaginário $2b = 8$. E, encontre as equações das assíntotas.

   (b) Eixo focal sobre Oy, $2a = 16$ e excentricidade igual a $\frac{5}{4}$. E, encontre as equações das assíntotas.

3. Encontrar a equação da hipérbole com focos nos vértices da elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ e vértices nos focos dessa elipse.

4. Obter a excentricidade da hipérbole equilátera cuja distância focal é igual a 6 unidades de comprimento

5. A equação de uma das assíntotas da hipérbole $x^2 - y^2 = 16$

   (a) $y = 2x - 1$

   (b) $y = 4x$

   (c) $y = x$

   (d) $y = 2x$

6. Determinar a equação geral da hipérbole de centro (3,5), eixo real igual a 10, paralelo ao eixo x e eixo imaginário igual a 6.

7. Determine a equação da hipérbole de centro $C(3, -2)$ e eixo real paralelo ao eixo x, sabendo que o eixo real mede 12 e o eixo imaginário mede 6.

8. Obter uma equação geral da hipérbole dada as seguintes equações paramétricas:

   (a) $x = 4sec\theta, y = 2tg\theta$

   (b) $x = tg\theta, y = 3sec\theta$

   (c) $x = 2 + 3tg\theta, y = 1 + 4sec\theta$.

9. Determine as equações paramétricas das hipérboles:

   (a) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

(b) $\dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{25} = 1$

(c) $\dfrac{(x-2)^2}{16} - \dfrac{(y-1)^2}{9} = 1$

1.13 Lista de exercícios: Cônicas

Parábola:

1. Para cada uma das parábolas nos exercícios abaixo encontre as coordenadas do foco, a equação da diretriz e as equações paramétricas. Esboçar o gráfico:

   (a) $x^2 = 12y$

   (b) $y^2 + 8x = 0$

   (c) $3y^2 - 12x = 0$

   (d) $3x^2 - 12y = 0$

   (e) $y^2 = 5x$

2. Encontre uma equação e esboce o gráfico das parábolas que satisfazem as condições dadas:

   (a) Foco (5,0), diretriz $x = -5$

   (b) Foco (0,-2), diretriz $y - 2 = 0$

   (c) Foco ($\frac{1}{2}$,0), diretriz $2x + 1 = 0$

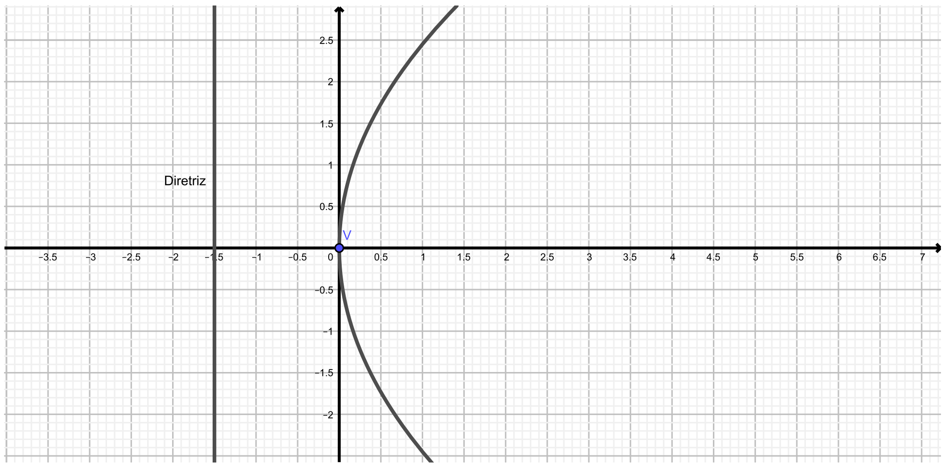
   (d) Vértice (0,0), diretriz $y = -2$

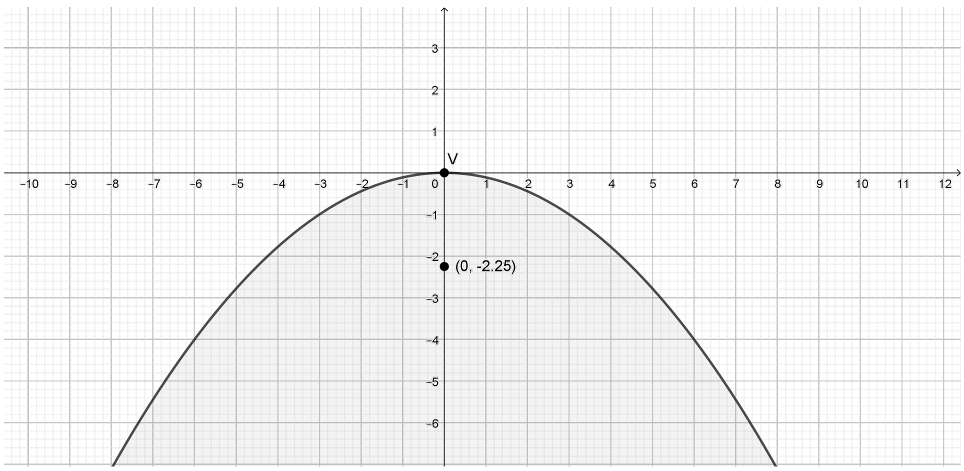
   (e) Foco (2,0), diretriz $x + 2 = 0$

   (f) Vértice (0,0), Foco (0,-3)

3. Encontre uma equação da parábola que tenha seu vértice na origem, o eixo y como seu eixo e que passe pelo ponto $(-2, -4)$.

4. Escreva uma equação para cada parábola e identifique todos os seus elementos:

(a) 

(b) 

Elipse:

1. Em cada um dos problemas, determinar os vértices, os focos, a excentricidade e as equações paramétricas de cada elipse. Esboçar o gráfico:

   (a) $9x^2 + 25y^2 = 225$

   (b) $9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$

   (c) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

   (d) $y^2 + 2x^2 - 8 = 0$

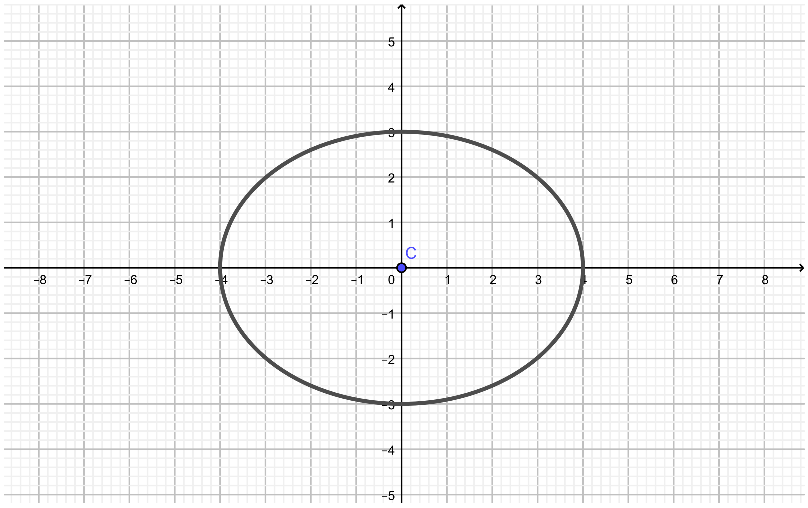
2. Em cada um dos problemas determinar uma equação da elipse que satisfaça as condições dadas:

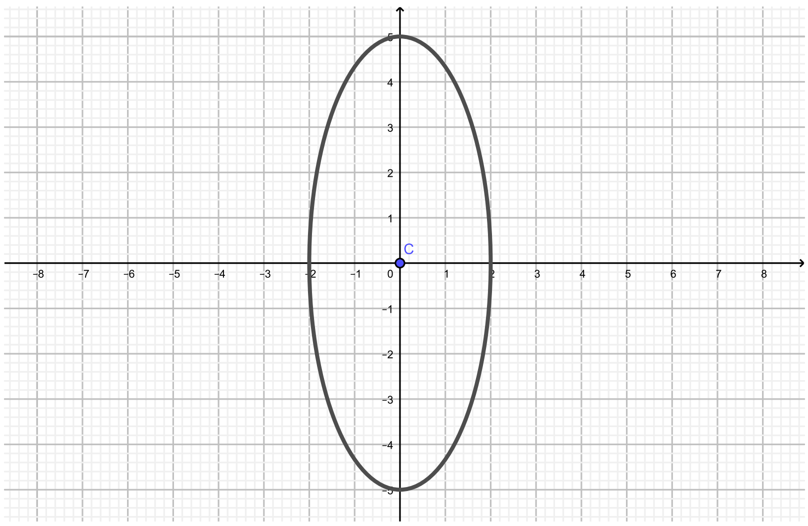
   (a) Focos $F_1(-6{,}0)$ e $F_2(6{,}0)$, eixo maior igual a 14.

   (b) Focos $F_1(0,-3)$ e $F_2(0{,}3)$, eixo maior igual a 10.

   (c) Foco $F(3{,}0)$ e vértice $A(4{,}0)$.

3. Escreva a equação reduzida padrão de cada elipse e identifique todos os seus elementos:

(a) 

(b) 

4. Uma elipse tem centro $C(0,0)$ e excentricidade $\frac{4}{5}$. Determinar sua equação e construí-la, sabendo que seu eixo focal está sobre o eixo Ox e mede 16.

Circunferência:

1. Nos itens abaixo escreva as equações da circunferência na forma centro-raio, na forma geral e as equações paramétricas:

   (a) $C(4,-3)$, $r = 5$
   (b) $C(-5,-12)$, $r = 3$
   (c) $C(0,0)$, $r = 4$

2. Escreva a equação da circunferência cujo centro (1,2) e passa pelo ponto (3,-1).

3. Determine o centro e o raio das circunferências e escreva suas equações paramétricas:

   (a) $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9 = 0$
   (b) $3x^2 + 3y^2 + 4y - 7 = 0$
   (c) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$

4. O segmento de extremidade $P(2{,}8)$ e $Q(4{,}0)$ é o diâmetro de uma circunferência. Encontre a equação da circunferência.

5. Qual é a equação da circunferência que passa pela origem e tem o ponto C(-1,-5) como centro?

6. Verifique se as equações abaixo representam circunferências:

   (a) $x^2 + 3y^2 - 5x - 7y - 1 = 0$
   (b) $x^2 + y^2 + xy - 4x - 6y - 9 = 0$
   (c) $3x^2 + 3y^2 + 4x - 6y + 15 = 0$
   (d) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 = 0$
   (e) $x^2 + y^2 - 14x - 6y + 49 = 0$

7. Obter a interseção da reta $s : y = x$ com a curva $x^2 + y^2 = 2$.

8. Obter a interseção da reta $s : y = x - 2$ com a curva $x^2 + y^2 = 2$.

9. Obter a interseção da reta $s : y = x - 3$ com a curva $x^2 + y^2 = 2$.

10. O ponto $P(3{,}b)$ pertence à circunferência de centro $C(0{,}3)$ e raio 5. Qual o valor da ordenada b?

Hipérbole

1. Em cada um dos problemas, determinar os vértices, os focos, a excentricidade, as equações das assíntotas e as equações paramétricas das hipérboles:

   (a) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$
   (b) $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{25} = 1$
   (c) $9x^2 - 25y^2 - 225 = 0$
   (d) $y^2 - 2x^2 - 8 = 0$

(e) $\dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{16} = 1$

2. Determinar uma equação da hipérbole que satisfaça as condições dadas e esboçar o gráfico:

   (a) Focos em (0,5) e (0, − 5), vértices em (0,3) e (0, − 3).

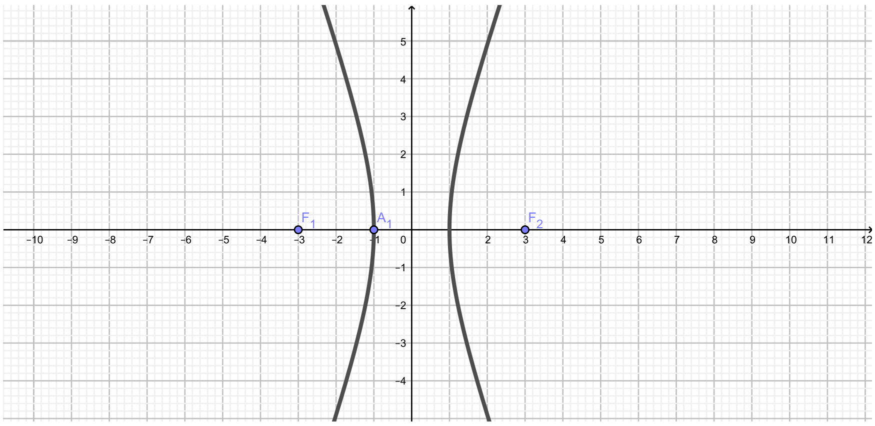
   (b) Focos em (2,0) e (−2,0), vértices em (1,0) e (−1,0).

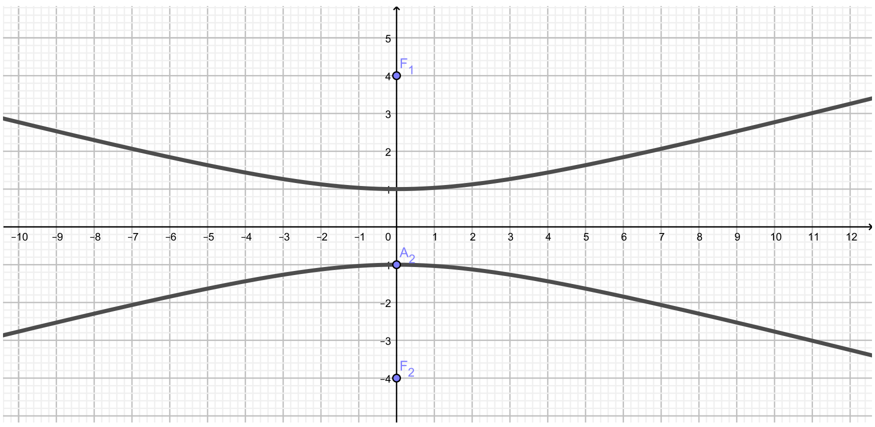
   (c) Vértices em (4,0) e (−4,0), excentricidade $\dfrac{5}{4}$.

   (d) Vértices (0,2) e (0, − 2), excentricidade $\sqrt{5}$.

   (e) Focos em (5,0) e (−5,0) e equações das assíntotas $y = \pm\dfrac{3}{4}x$.

3. Escreva a equação reduzida padrão de cada hipérbole e identifique todos os seus elementos:

(a) 

(b) 

Equações Paramétricas:

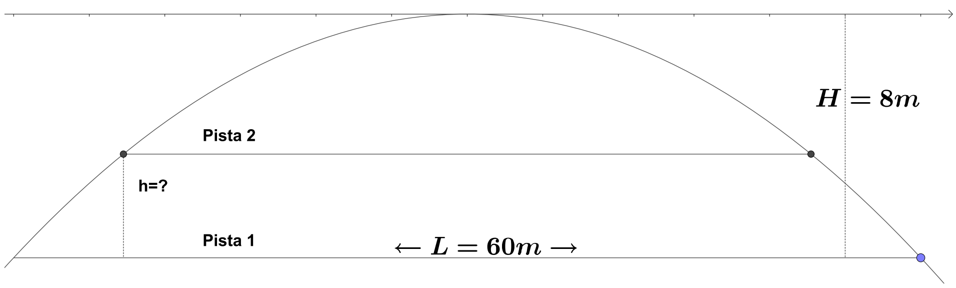
1. Escrevas as equações paramétricas das cônicas abaixo:
   (a) $y^2 = -2x$
   (b) $9x^2 + 5y^2 - 45 = 0$
   (c) $4x^2 - 5y^2 + 20 = 0$

Translação de eixos:

1. Traçar um esboço do gráfico e obter uma equação da parábola de $V(3, -1)$ e $F(-1, -1)$.
2. Traçar um esboço do gráfico e obter uma equação da parábola de $V(-4{,}2)$ e $F(-4{,}5)$.
3. Determinar a equação da parábola cujo foco é $F(1{,}2)$ e cuja diretriz é a reta $x - 5 = 0$.
4. Traçar um esboço do gráfico e obter uma equação da parábola de $V(4, -3)$, eixo paralelo ao eixo x, passando pelo ponto $P(2{,}1)$.
5. Determine o vértice, o foco, a diretriz e o eixo de simetria e faça o esboço de cada parábola:
   (a) $(y - 3)^2 = 5(x + 7)$
   (b) $(x - 2)^2 = -4(y + 1)$
   (c) $(y + 1)^2 = -4(x + 4)$
   (d) $(x + 1)^2 = -4(y + 4)$
6. Obter a equação padrão das parábolas, determine seus elementos e faça o gráfico:
   (a) $y^2 - 12x + 2y = 11$
   (b) $x^2 + 2x + 4y - 3 = 0$
   (c) $x^2 - 2x - 20y - 39 = 0$
   (d) $x^2 - 2x + 12y - 35 = 0$
   (e) $y = -2x^2 + 8x - 8$
   (f) $y^2 + 8y - 12x + 40 = 0$
   (g) $2y^2 - 5x + 8y - 7 = 0$
7. Determinar a equação da parábola que passa pelos pontos $(4, -2)$, $(8, -10)$ e $(-2, -5)$. (Dica: lembre que podemos escrever a equação da parábola como $y = ax^2 + bx + c$).

8. Uma bala de canhão é lançada descrevendo uma trajetória balística. Desprezando a resistência do ar, a bala percorre um arco de parábola. Uma bala de canhão foi arremessada e percorre uma trajetória parabólica, em que os pontos que a bala de canhão ocupa, se colocados sobre o eixo cartesiano, tem coordenadas que obedecem a seguinte equação: $y = -x^2 + 6x$. Sendo x a distância horizontal desde o ponto de lançamento e y a altura a partir do solo, em metros, calcule a distância horizontal que a bala percorre até cair no solo e a altura máxima que ela atinge. (Exercício adaptado da revista Matemática Vestibular+ Enem 2011)

9. A Figura mostra um túnel hipotético de duas pistas com uma seção transversal que é uma parábola. A altura do túnel é de 8 metros e sua largura $L = 60$ metros. Pretende-se saber a altura que a segunda pista deverá estar de modo que ela tenha 44 metros de largura. (Exercício adaptado do artigo: As seções cônicas na Engenharia Civil)



10. Obter uma equação da elipse de $C(-1,-2)$, foco $F(-1,-5)$ e excentricidade $\frac{3}{5}$

11. Obter uma equação da elipse de eixo maior igual a 8 e focos $F_1(2,-1)$ e $F_2(2{,}5)$.

12. Determine o centro, os focos, os vértices da elipse: $\dfrac{(x-3)^2}{225} + \dfrac{(y-4)^2}{289} = 1$.

13. Determine a equação reduzida padrão, as equações paramétricas, todos os seus elementos e esboçar as elipses de equação geral:

    (a) $4x^2 + 9y^2 - 24x + 18y + 9 = 0$

    (b) $16x^2 + y^2 + 64x - 4y + 52 = 0$

(c) $9x^2 + 16y^2 - 36x + 96y + 36 = 0$
(d) $16x^2 + 9y^2 + 96x - 36y + 36 = 0$
(e) $5x^2 + 9y^2 - 20x - 18y - 151 = 0$
(f) $16x^2 + 9y^2 - 96x + 72y + 144 = 0$

14. Determine a equação da hipérbole de centro $C(2, -1)$, um vértice $A(2, -5)$ e um foco $F(2, -6)$.

15. Determine a equação da hipérbole de centro $C(1, -3)$, um foco $F(1{,}2)$ e um vértice $A(1{,}1)$.

16. Determine o centro, os focos, os vértices da hipérbole: $\dfrac{(x-3)^2}{225} - \dfrac{(y-4)^2}{289} = 1$.

17. Determine a equação reduzida padrão, as equações paramétricas, todos os seus elementos e esboçar as hipérboles de equação geral:

(a) $-16x^2 + 9y^2 - 160x - 54y - 895 = 0$
(b) $25x^2 - 36y^2 - 100x - 72y - 836 = 0$
(c) $9x^2 - 16y^2 + 54x + 32y - 79 = 0$
(d) $16y^2 - 9x^2 + 96y + 36x - 36 = 0$
(e) $9x^2 - 16y^2 - 18x + 64y - 199 = 0$
(f) $5x^2 - 8y^2 - 20x - 48y - 92 = 0$

18. Identifique cada uma das cônicas:

(a) $x^2 - 8x + 12y + 40 = 0$
(b) $9x^2 + 4y^2 - 54x - 32y + 109 = 0$
(c) $y^2 + 2y - 12x + 25 = 0$
(d) $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$
(e) $3x^2 - y^2 - 24x + 4y + 41 = 0$
(f) $4x^2 - y^2 - 8x - 4y - 4 = 0$
(g) $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 6 = 0$
(h) $x^2 + 4x + y^2 = 12$
(i) $x^2 + 2x + 4y - 3 = 0$
(j) $x^2 - y^2 - 2x + 4y = 4$

19. Nos exercícios abaixo são dadas equações de parábolas, elipses e hipérboles e é dito em quantas unidades para cima ou para baixo e para direita ou para esquerda cada uma foi transladada. Determine a equação das novas cônicas e determine o novo centro, foco(s), vértices, diretriz(parábola) e assíntotas(hipérbole):

(a) $y^2 = 4x$ para a esquerda 2, para baixo 3.

(b) $x^2 = 8y$ para a direita 1, para baixo 7.

(c) $\dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ para a esquerda 2, para baixo 1.

(d) $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{2} = 1$ para a direita 2, para cima 3.

(e) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{5} = 1$ para a direita 2, para cima 2.

(f) $y^2 - x^2 = 1$ para a esquerda 1, para baixo 1.

Capítulo 2

Superfícies

2.1 Introdução

Uma superfície é, em geral, o lugar geométrico dos pontos do espaço que satisfazem a uma condição dada. Assim, o conjunto dos pontos $P(x,y,z)$ que estão a k unidades da origem, determinam uma superfície.

O nome quádricas é designado para algumas superfícies de $\mathbb{R}^3$, que podem ser consideradas a versão tridimensional das cônicas. Neste capítulo, faremos uma breve descrição das principais superfícies quádricas a partir de suas equações reduzidas, que nos fornecem informações geométricas para esboçar o gráfico de cada uma das superfícies. A equação geral de segundo grau nas três variáveis x, y e z:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + mx + ny + pz + q = 0 \qquad (2.1)$$

representa uma superfície quádrica, onde pelo menos um dos coeficientes a , b, c, d, e ou f é diferente de zero. Se a superfície representada pela equação 2.1 for cortada pelos planos coordenados ou por planos paralelos a eles, a curva de interseção será uma cônica. A interseção de uma superfície com um plano é chamada **traço** da superfície no plano.

A equação 2.1, permite conhecer propriedades geométricas das quádricas correspondentes e esboçá-las com facilidade. Muito útil são as informações que pudermos obter a respeito das simetrias da quádrica em relação aos planos coordenados, aos eixos coordenados e a origem do sistema de coordenadas.

Diremos que uma superfície é simétrica, por exemplo, em relação ao plano xy se para qualquer ponto $P(x,y,z)$ dessa superfície existir um ponto, $P(x,y,-z)$ pertencente a superfície. A equação não se altera pela substituição de z por $-z$. Portanto, a superfície cuja equação cartesiana não se altera quando trocamos o sinal de uma das variáveis é simétrica em relação ao plano das outras duas variáveis. Em particular, se a equação cartesiana de uma superfície só contém expoentes pares para a variável z, então essa superfície é simétrica em relação ao plano xy. Desta forma, um conjunto S é simétrico com respeito:

- ao plano xy quando $(x,y,z) \in S \Longleftrightarrow (x,y,-z) \in S$;
- ao plano xz quando $(x,y,z) \in S \Longleftrightarrow (x,-y,z) \in S$;
- ao plano yz quando $(x,y,z) \in S \Longleftrightarrow (-x,y,z) \in S$;
- à origem quando $(x,y,z) \in S \Longleftrightarrow (-x,-y,-z) \in S$;

Desta forma, será possível observar que, por exemplo, se a equação da superfície quádrica for $ax^2+by^2+cz^2+j=0$, isto é, se as incógnitas x, y e z comparecem apenas com expoentes pares, então essa superfície será totalmente simétrica em relação aos planos coordenados, aos eixos coordenados e à origem.

Com relação a equação, através de mudanças de coordenadas a equação de segundo grau nas três variáveis pode ser transformada, em certas formas padronizadas e então, é possível classificarmos as superfícies quádricas. A equação 2.1 pode-se reduzir a uma das formas a saber,

$$Ax^2+By^2+Cz^2=D. \tag{2.2}$$

As superfícies que correspondem a equação 2.2 são simétricas em relação aos planos coordenados, aos eixos coordenados e ao centro de simetria (centro da superfície). E, as superfícies de equação,

$$Ax^2+By^2+Rz=0 \tag{2.3}$$
$$Ax^2+Ry+Cz^2=0 \tag{2.4}$$
$$Rx+By^2+Cz^2=0 \tag{2.5}$$

possuem dois planos de simetria, um eixo de simetria e não possuem centro de simetria.

2.1.1 Superfícies Quádricas Centradas

Caso nenhum dos coeficientes da equação (2.2) for nulo, ela pode ser escrita sob uma das formas

$$\pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{2.6}$$

denominadas como forma canônica de uma superfície quádrica centrada. De acordo com os sinais dos termos são classificadas em Elipsóide, Hiperbolóide de uma folha e Hiperbolóide de duas folhas.

2.1.2 Elipsóide

Chamamos uma superfície quádrica de Elipsóide se existem números reais positivos a, b, c pelo menos dois deles distintos e um sistema ortogonal de coordenadas em relação ao qual a quádrica pode ser escrita pela equação:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{2.7}$$

A equação 2.7 é totalmente simétrica em relação ao sistema de coordenadas. Os números reais positivos a, b, c representam as medidas dos semieixos da superfície, conforme a Figura 2.1.

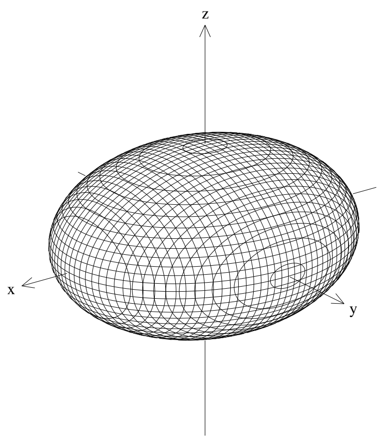


Figura 2.1: Elipsóide

Estudo da Superfície

Para esboçar o gráfico da superfície, vamos fazer uma análise através da equação 2.7, examinando suas interseções com planos coordenados, planos paralelos aos planos coordenados e com os eixos de coordenados.

- Interseções com os eixos coordenados, no caso do elipsóide, são seis pontos de interseção da superfície S com os eixos:
  - com o eixo Ox: $y = z = 0 \to Ox \cap S : (a,0,0)$ e $(-a,0,0)$;
  - com o eixo Oy: $x = z = 0 \to Oy \cap S : (0,b,0)$ e $(0,-b,0)$;
  - com o eixo Oz: $x = y = 0 \to Oz \cap S : (0,0,c)$ e $(0,0,-c)$.
- Traços nos planos coordenados, interseções da superfície S com os respectivos planos coordenados:

- com o plano xy: $z = 0 \rightarrow \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;
- com o plano xz: $y = 0 \rightarrow \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$;
- com o plano yz: $x = 0 \rightarrow \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

Exemplo 19. *A Figura 2.2, mostra os seis vértices do Elipsóide interseção com os eixos coordenados.*

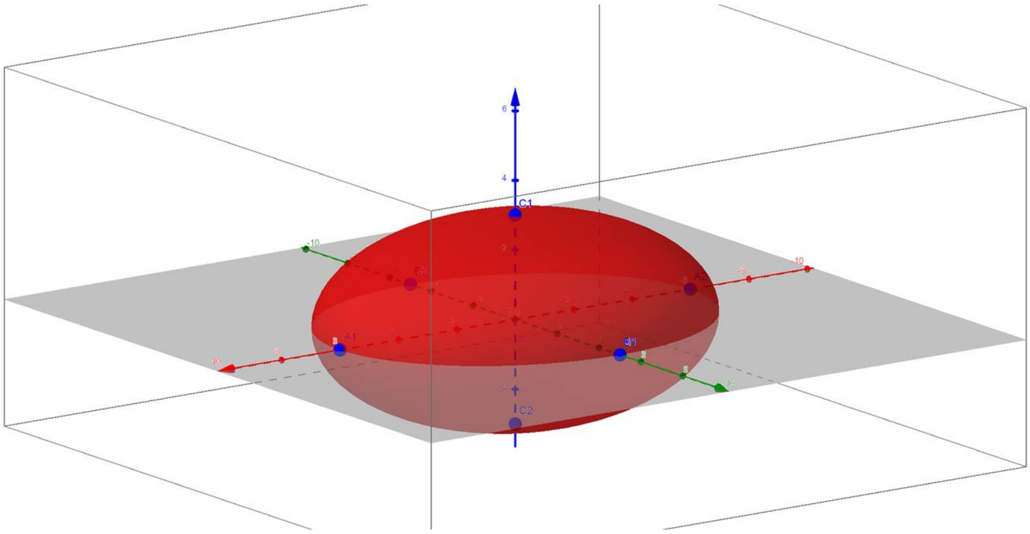


Figura 2.2: Elipsóide interseção com eixos coordenados.

Exemplo 20. *AFigura 2.3, apresenta a interseção do Elipsóide com o plano yz.*

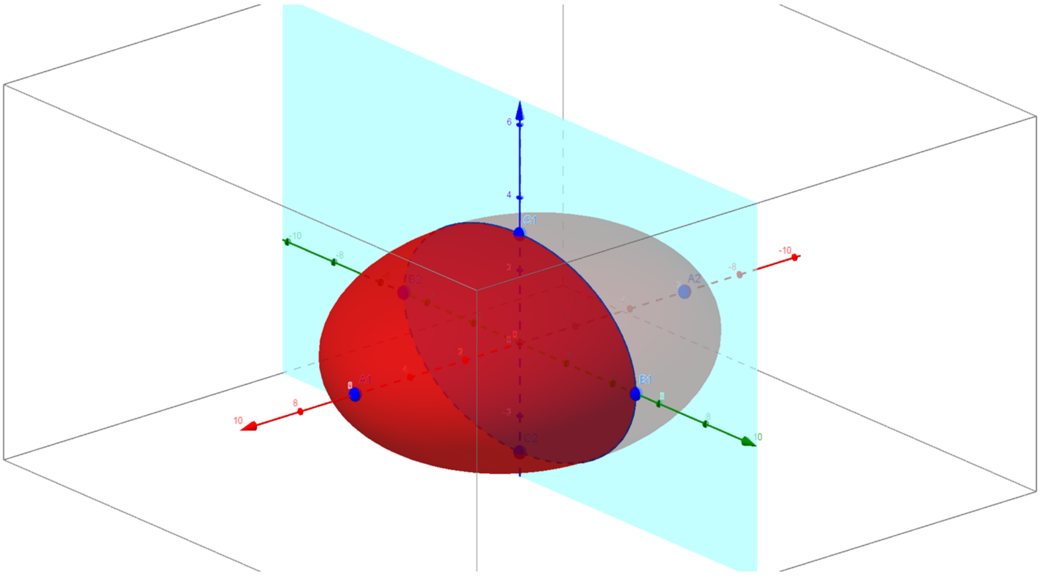


Figura 2.3: Interseção do Elipsóide com o plano yz.

A interseção da superfície com o plano yz, apresenta uma curva, nesse caso uma Elipse no plano yz, conforme a Figura 2.4.

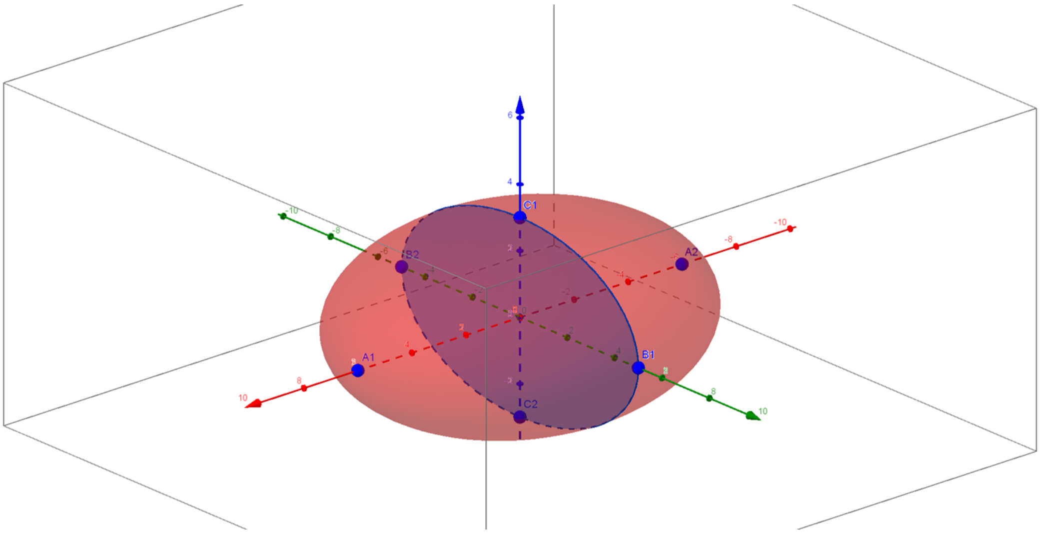


Figura 2.4: A Elipse formada da interseção do plano yz com a superfície.

Vamos analisar a interseção da superfície com o plano $\pi : x = k$ paralelo ao plano yz. Substituindo na equação 2.7 $x = k$, observe que, se $k^2 > a^2$, a interseção será vazia. Somente será não vazia se, e somente se, $k^2 \leq a^2$, isto é, $-a \leq k \leq a$. Se $k = a$, ela se reduz ao ponto $(a{,}0{,}0)$ e se $k = -a$, ela se reduz ao ponto $(-a{,}0{,}0)$. Pela Figura 2.5, temos o exemplo de um Elipsóide interseção com o plano $\pi : x = 3$ paralelo ao plano yz e na Figura 2.6 temos o caso em que $k = 5$, então a interseção se reduz ao ponto (5,0,0).

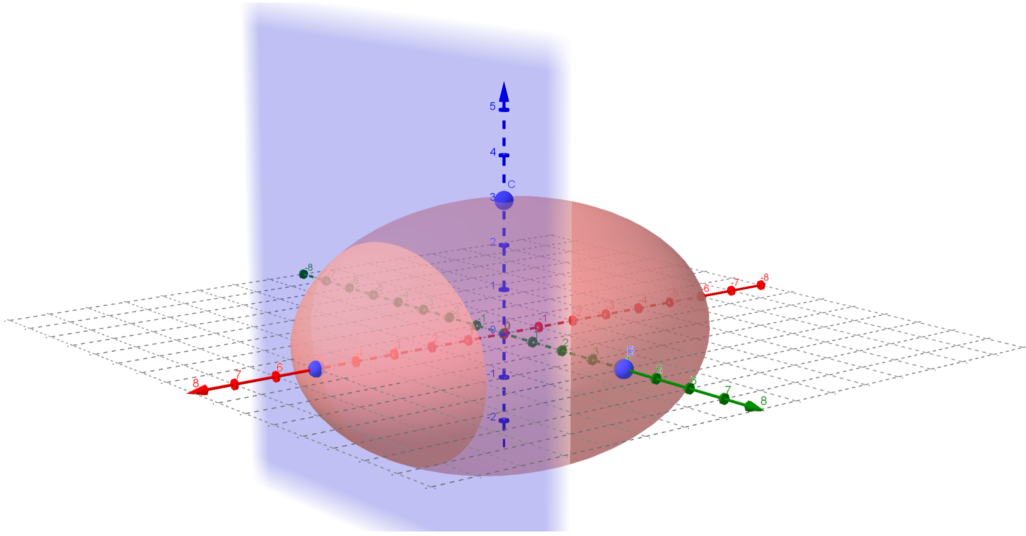


Figura 2.5: Interseção do plano $x = 3$ com a superfície.

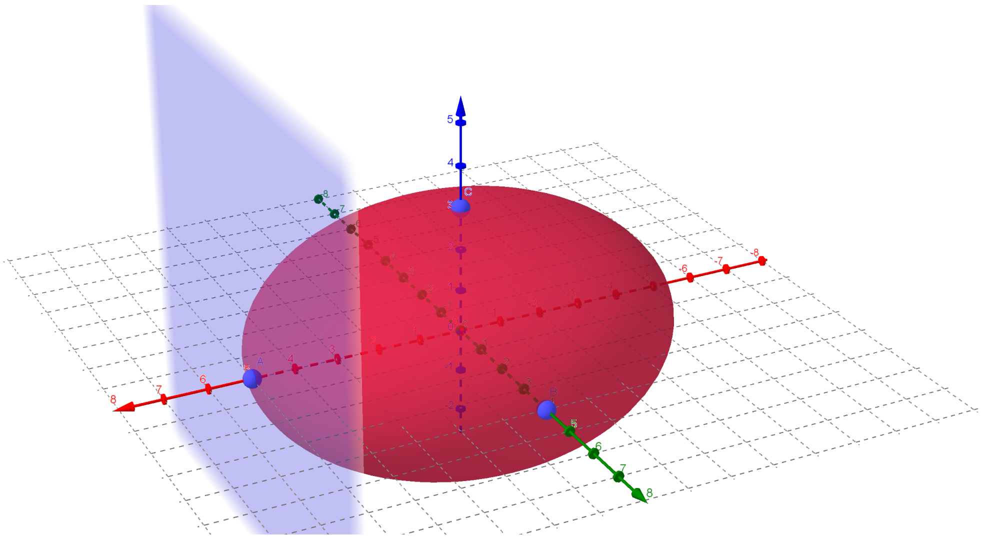


Figura 2.6: Interseção do plano $x = 5$ com a superfície.

Se pelo menos dois valores a, b, c são iguais, o elipsóide é de **revolução**. O exemplo a seguir apresenta um elipsóide de revolução.

Exemplo 21. *O gráfico mostra um elipsóide de equação* $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} + \dfrac{z^2}{9} = 1,$

nesse caso $a = c$ o elipsóide é obtido girando a elipse $\dfrac{y^2}{25} + \dfrac{z^2}{9} = 1$, $x = 0$ do plano yz em torno do eixo y.

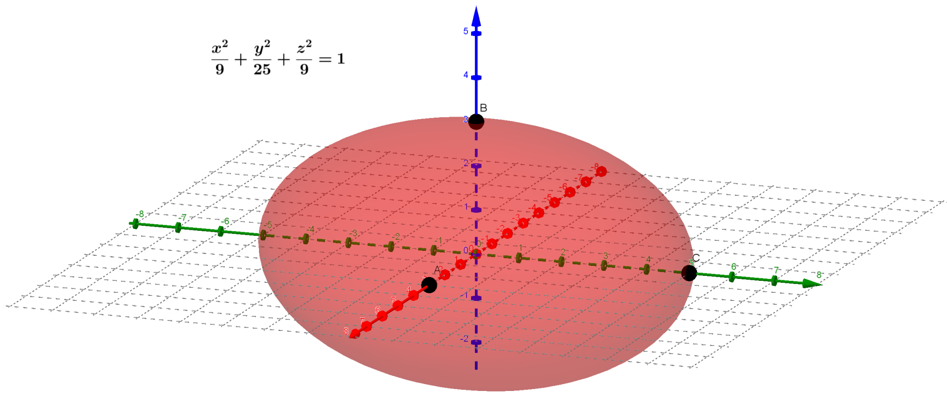


Figura 2.7: Elipsóide de Revolução.

Pelo exemplo, o traço no plano xz será uma circunferência de equação $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{z^2}{9} = 1$, para $y = 0$.

2.1.3 Superfície Esférica ou Esfera

Superfície esférica ou esfera é o lugar geométrico dos pontos do $\mathbb{R}^3$, cuja distância a um ponto fixo (centro) é constante. No caso em que $a = b = c$, a equação toma a seguinte forma,

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \tag{2.8}$$

e representa uma **superfície esférica ou esfera** de centro $C(0,0,0)$ e raio a, conforme a Figura 2.8.

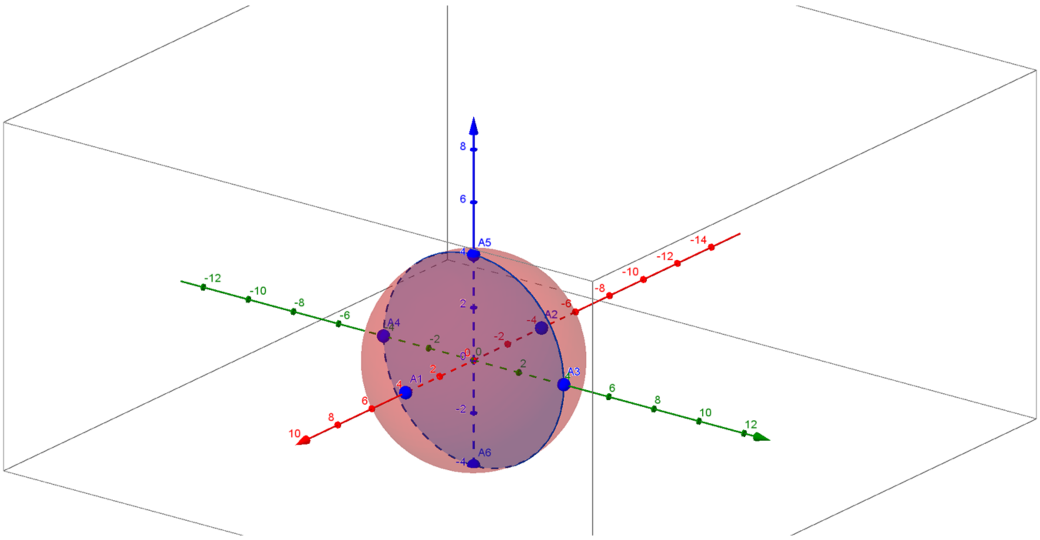


Figura 2.8: Superfície Esférica

Exemplo 22. *O gráfico mostra uma superfície esférica interseção com um plano paralelo ao plano xy.*

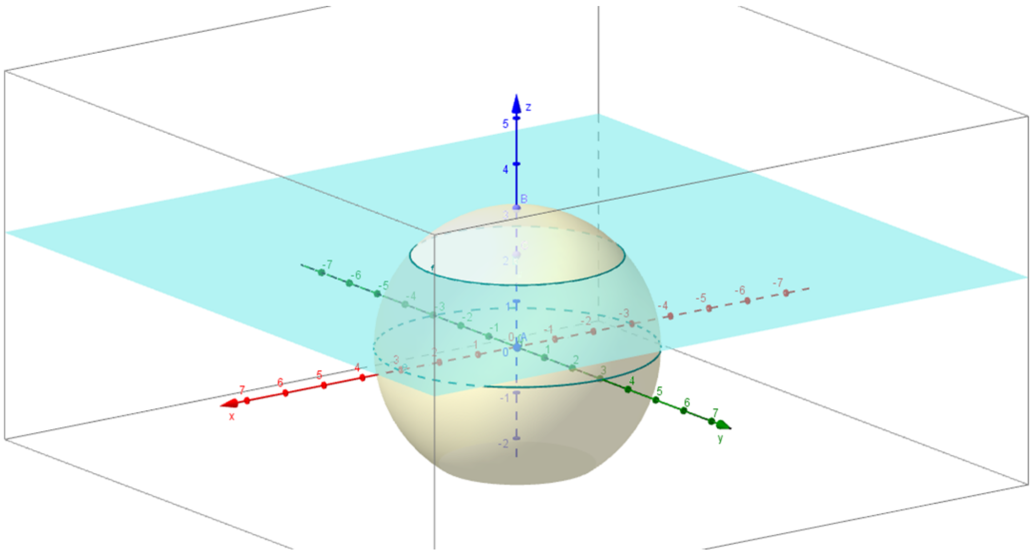


Figura 2.9: Esfera interseção com plano $z = k$.

Translação de Eixos: Elipsóide e Esfera

Pela translação de eixos com $C(h,k,l)$ sendo o centro do Elipsóide e seus eixos paralelos aos eixos coordenados a equação é:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} + \frac{(z-l)^2}{c^2} = 1 \quad (2.9)$$

cuja equação geral é $ax^2 + by^2 + cz^2 + dx + ey + fz + h = 0$, com a, b e c positivos. E, na equação da Superfície Esférica,

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2 = a^2 \quad (2.10)$$

desenvolvendo a equação, temos $x^2 + y^2 + z^2 + dx + ey + fz + h = 0$ como sua equação geral.

2.1.4 Hiperbolóide de uma folha

Chamamos de Hiperbolóide de uma folha, se existirem números reais a, b e c e um sistema ortogonal de coordenadas em relação ao qual a superfície pode ser escrita pela equação:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (2.11)$$

ao longo do eixo Oz, conforme a Figura 2.10. O Hiperbolóide de uma folha é simétrico em relação ao sistema de coordenadas.

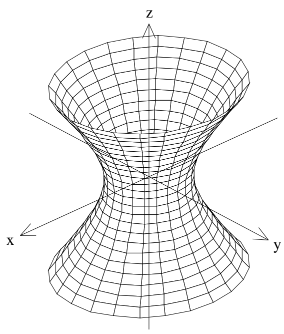


Figura 2.10: Hiperbolóide de uma folha ao longo do eixo dos z.

Exemplo 23. *O gráfico mostra um hiperbolóide de equação* $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{36} = 1$*, ao longo do eixo* z*. Embora a figura mostre um hiperbolóide limitado ao longo do eixo* Oz*, a figura se prolonga indefinidamente ao longo desse eixo. Mas é possível restringir um valor para* z *em um determinado intervalo.*

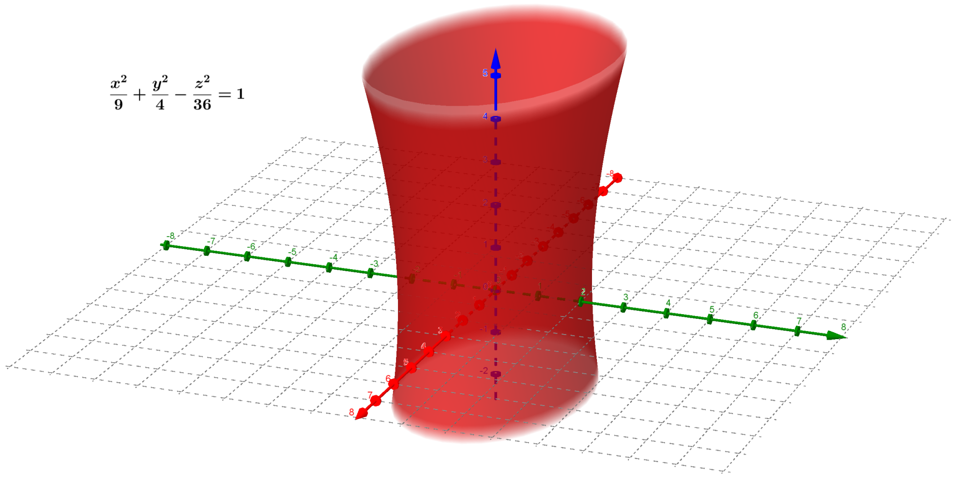


Figura 2.11: Hiperbolóide de uma folha.

Estudo da Superfície

Para esboçar o gráfico da superfície, vamos fazer uma análise através da equação 2.11, examinando suas interseções com planos coordenados, planos paralelos aos planos coordenados e com os eixos de coordenados.

- Interseções com os eixos coordenados, no caso do Hiperbolóide de uma folha ao longo do eixo z temos:
  - com o eixo Ox: $y = z = 0 \to Ox \cap S : (a,0,0)$ e $(-a,0,0)$, pois um ponto $(x,0,0)$ pertence a S se, e somente se $x^2 = a^2$;
  - com o eixo Oy: $x = z = 0 \to Oy \cap S : (0,b,0)$ e $(0,-b,0)$, pois um ponto $(0,y,0)$ pertence a S se, e somente se $y^2 = b^2$;
  - com o eixo Oz: $x = y = 0 \to Oz \cap S$: é um conjunto vazio, pois $z^2 = -c^2$, é o únicos dos três eixos que não tem ponto comum com o hiperbolóide de uma folha, nesse caso.

- Traços nos planos coordenados, interseções da superfície S com os respectivos planos coordenados:
  - com o plano xy: $z = 0 \to \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ é uma elipse para $a \neq b$ ou uma circunferência quando $a = b$;
  - com o plano xz: $y = 0 \to \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ é uma hipérbole;
  - com o plano yz: $x = 0 \to \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ é uma hipérbole.

As Figuras 2.12 e 2.13, mostram as interseções da superfície com os planos yz e xz respectivamente.

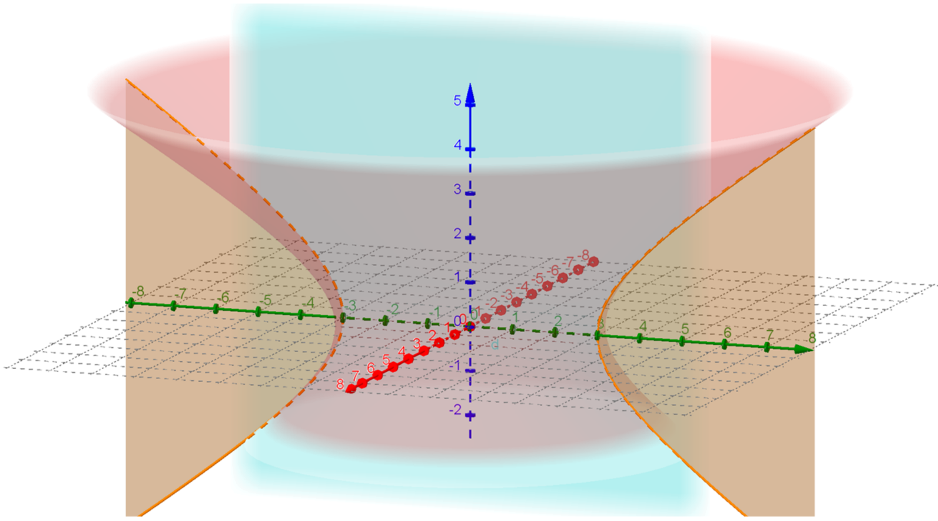


Figura 2.12: Hiperbolóide de uma folha interseção com o plano yz.

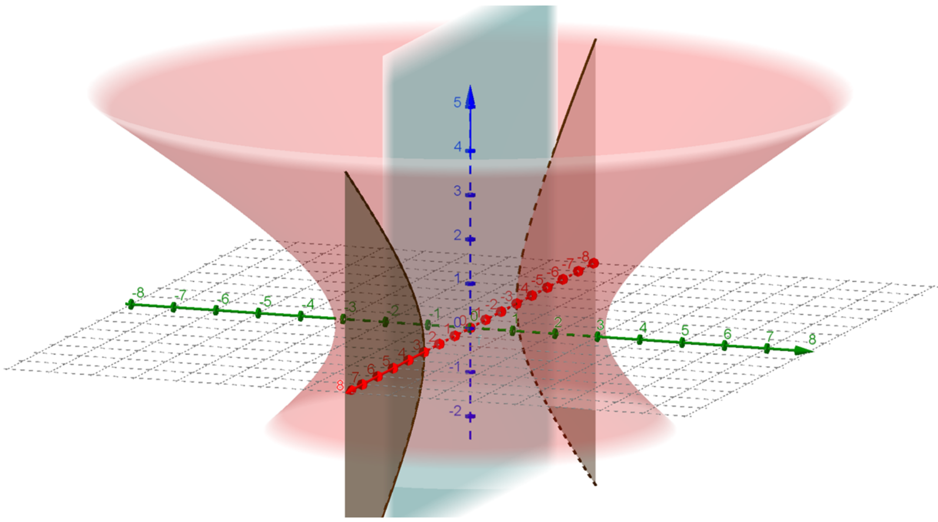


Figura 2.13: Hiperbolóide de uma folha interseção com o plano xz.

Os hiperbolóides de revolução são obtidos por rotações em torno de um de seus eixos. Considere a equação $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, em $x = 0$, a rotação dessa hipérbole em torno do seu eixo z resulta no Hiperbolóide de uma folha ao longo do eixo dos z. Se $a = b$ nesse hiperbolóide, o traço no plano xy é uma circunferência.

Exemplo 24. *Hiperbolóide de uma folha ao longo do eixo dos z de revolução. Equação:* $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{36} = 1$.

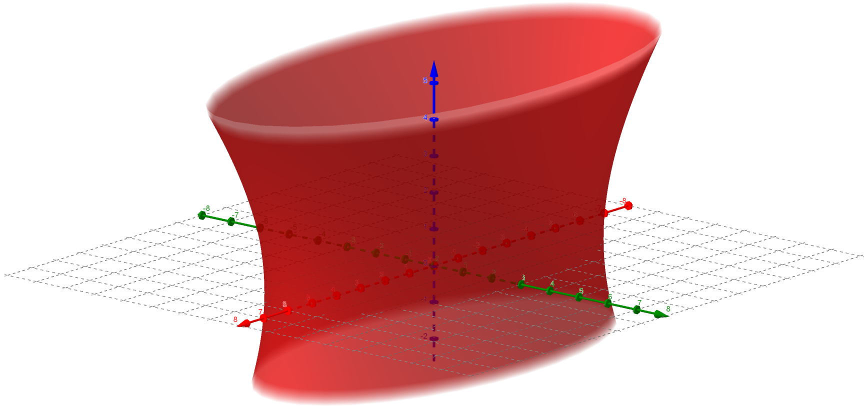


Figura 2.14: Hiperbolóide de Revolução.

Os traços nos planos $z = k$, paralelo ao plano xy é uma elipse, que aumenta de tamanho a medida que se afasta do plano xy. Os traços nos planos $y = k$ e $x = k$, são hipérboles.

Exemplo 25. *Hiperbolóide de uma folha ao longo do eixo dos z, interseção com o plano $z = 3$.*

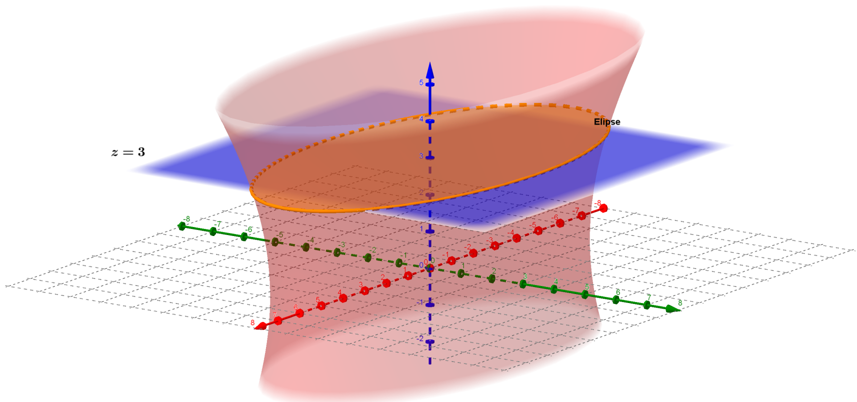


Figura 2.15: Hiperbolóde de uma folha interseção com plano paralelo ao plano xy.

As outras formas para a equação dos Hiperbolóides de uma folha são:

Eixo Oy	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
Eixo Ox	$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Exemplo 26. *Observe no gráfico a seguir que temos um Hiperbolóide de uma folha ao longo do eixo y, cuja equação é $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{4} = 1$. De forma análoga aos hiperbolóides anteriores aqui a superfície apesar de parecer limitada, ela se prolonga indefinidamente ao longo do eixo y.*

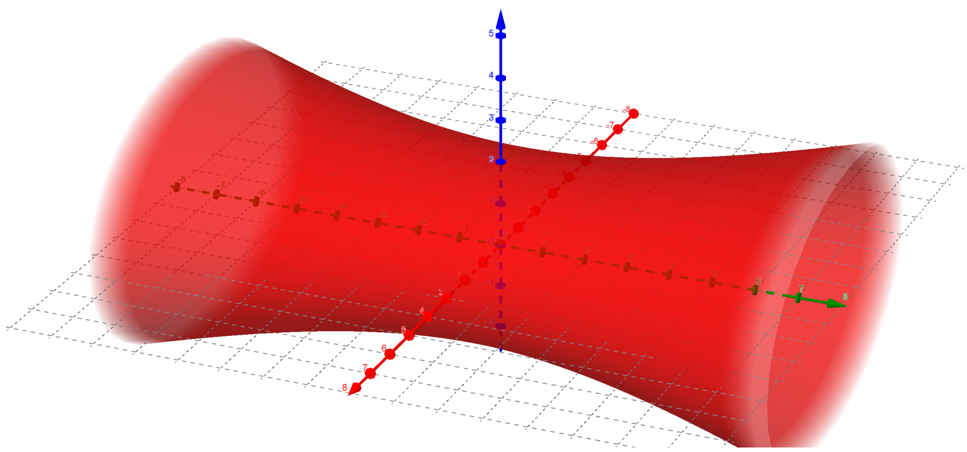


Figura 2.16: Hiperbolóide de uma folha ao longo do eixo y.

Translação de Eixos: Hiperbolóide de uma folha

Pela translação de eixos com $C(h,k,l)$ sendo o centro do Hiperbolóide e seus eixos paralelos aos eixos coordenados, sua equação em uma de suas formas é,

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(z-l)^2}{c^2} = 1 \tag{2.12}$$

De forma análoga para as demais formas da equação dos Hiperbolóides.

2.1.5 Hiperbolóide de duas Folhas

Chamamos de Hiperbolóide de duas folhas, se existirem números reais a, b e c e um sistema ortogonal de coordenadas em relação ao qual a superfície pode ser escrita pela equação:

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{2.13}$$

A equação 2.13 representa um Hiperbolóide de duas folhas ao longo do eixo z. Observe que apenas um termo do primeiro membro é positivo, observe a Figura 2.17.

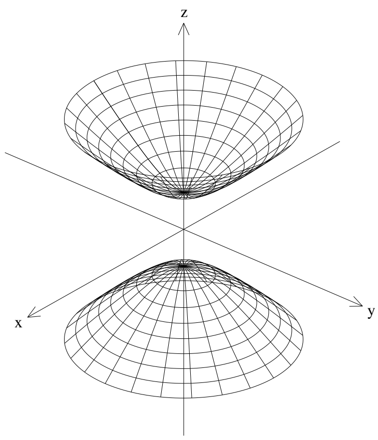


Figura 2.17: Hiperbolóide de duas folhas ao longo do eixo z.

Estudo da Superfície

Para esboçar o gráfico da superfície, vamos fazer uma análise através da equação 2.13, examinando suas interseções com planos coordenados, planos paralelos aos planos coordenados e com os eixos de coordenados.

- Interseções com os eixos coordenados, no caso do Hiperbolóide de duas folhas ao longo do eixo z temos:
  - com o eixo Ox: $y = z = 0 \to Ox \cap S$ é um conjunto vazio, pois $x^2 = -a^2$, não tem ponto comum com o hiperbolóide de duas folhas;
  - com o eixo Oy: $x = z = 0 \to Oy \cap S$ é um conjunto vazio, pois $y^2 = -b^2$, não tem ponto comum com o hiperbolóide de duas folhas;;
  - com o eixo Oz: $x = y = 0 \to Oz \cap S : (0{,}0{,}c)$ e $(0{,}0{,}-c)$ pois um ponto $(0{,}0{,}z)$ pertence a S se, e somente se $z^2 = c^2$.
- Traços nos planos coordenados, interseções da superfície S com os respectivos planos coordenados:
  - com o plano xy: $z = 0$ não intercepta a superfície, nem qualquer plano $z = k$, onde $|k| < c$. Se $|k| > c$ o traço é uma elipse;

– com o plano xz: $y = 0 \rightarrow -\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ é uma hipérbole;

– com o plano yz: $x = 0 \rightarrow -\dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ é uma hipérbole.

Exemplo 27. *Hiperbolóide de duas folhas de equação* $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$.

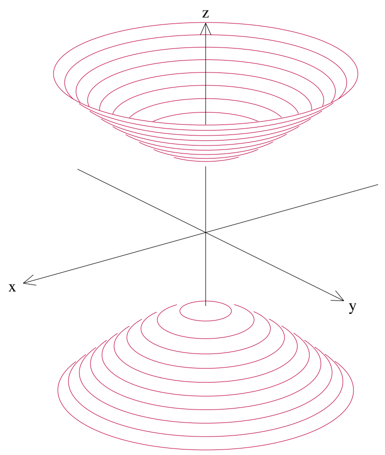


Figura 2.18: Hiperbolóide de duas folhas ao longo do eixo z.

As outras formas para a equação dos Hiperbolóides de duas folhas são:

Eixo Oy	$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
Eixo Ox	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

Exemplo 28. *Hiperbolóide de duas folhas ao longo do eixo x, cuja equação é do tipo:* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

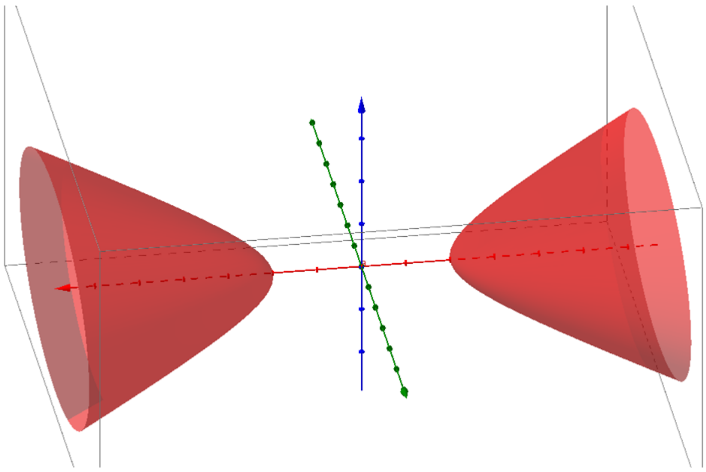


Figura 2.19: hiperbolóide de duas folhas ao longo do eixo x.

Exemplo 29. *Hiperbolóide de duas folhas ao longo do eixo x interseção com o plano xy.*

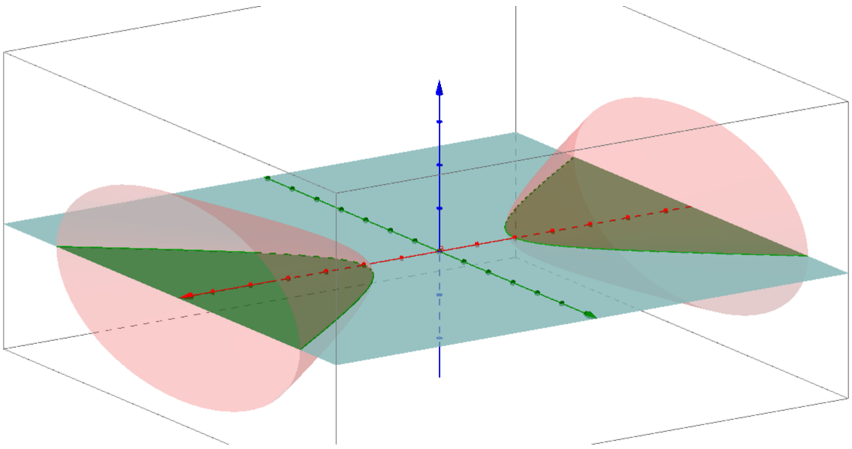


Figura 2.20: Hiperbolóide de duas folhas interseção com plano xy.

Pela equação 2.13, os traços nos planos $x = k$ e $y = k$ são hipérboles. Quando o hiperbolóide estiver ao longo do eixo x, temos que os traços nos planos $y = k$ e $z = k$ são hipérboles. E de forma análoga quando a superfície estiver ao longo do eixo y os traços nos planos $x = k$ e $z = k$ são hipérboles.

Exemplo 30. *Hiperbolóide de duas folhas ao longo do eixo y, de equação $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ interseção com o plano paralelo ao xy.*

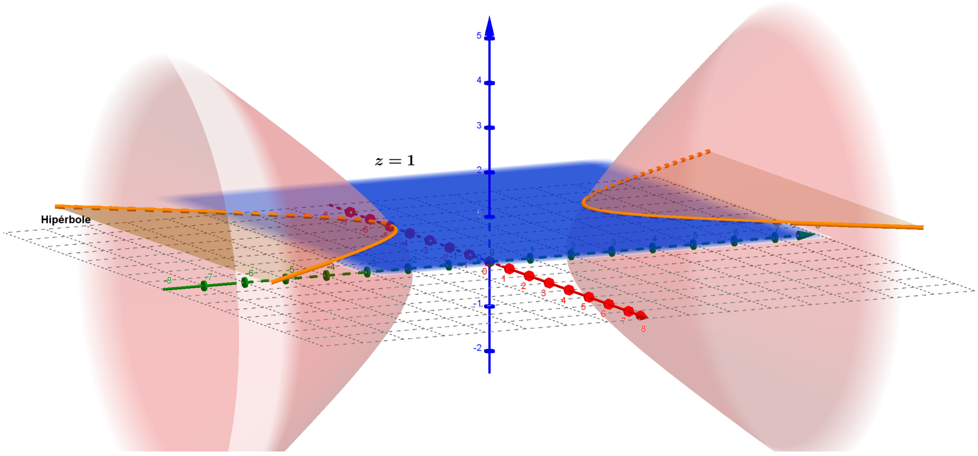


Figura 2.21: Interseção do Hiperbolóide com um plano paralelo ao plano xy.

Translação de Eixos: Hiperbolóide de duas folhas

Pela translação de eixos com $C(h,k,l)$ sendo o centro do Hiperbolóide e seus eixos paralelos aos eixos coordenados, sua equação em uma de suas formas é,

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(z-l)^2}{c^2} = 1 \tag{2.14}$$

De forma análoga para as demais formas da equação dos Hiperbolóides.

2.1.6 Superfícies Quádricas não Centradas

Se nenhum dos coeficientes dos termos do primeiro membro das equações (2.3) for nulo elas podem ser escritas sob uma das formas,

$$\pm\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = cz; \ \pm\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = by; \ \pm\frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = ax \tag{2.15}$$

As possíveis combinações permitem concluir apenas dois tipos de superfícies, se os dois termos de segundo grau possuem o mesmo sinal, são classificados como Parabolóide Elíptico, caso contrário, Parabolóide Hiperbólico.

2.1.7 Parabolóide Elíptico

Se existem números reais positivos a e b e um sistema ortogonal de coordenadas em relação ao qual uma quádrica seja descrita pela equação,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz \tag{2.16}$$

se $a \neq b$, chamamos de **parabolóide elíptico** e se $a = b$ é um **parabolóide de rotação** ou **circular**. O Parabolóide da equação 2.16 é simétrico em relação ao plano xz e ao plano yz e ao eixo Oz. Portanto, a equação representa um Parabolóide ao longo do eixo Oz. Como o eixo Oz é o único dos eixos em relação ao qual a superfície é simétrica, ele é chamado de eixo de simetria. O vértice da superfície é o seu ponto de interseção com o eixo de simetria, neste caso (0,0,0), conforme mostra a Figura 2.22.

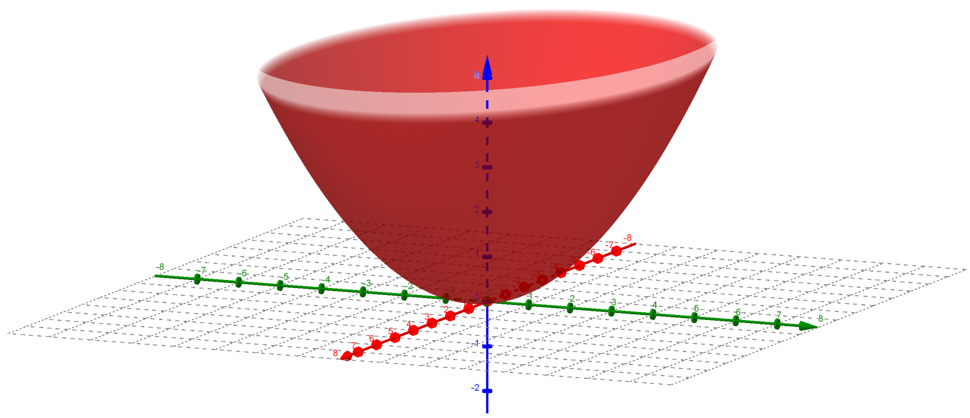


Figura 2.22: Parabolóide elíptico com eixo de simetria no Oz.

Estudo da Superfície

Para esboçar o gráfico da superfície, vamos fazer uma análise através da equação 2.16, examinando suas interseções com planos coordenados, planos paralelos aos planos coordenados e com os eixos de coordenados.

- Interseções com os eixos coordenados, no caso do Parábolóide ao longo do eixo z:
  - A interseção da superfície com qualquer dos três eixos coordenados reduz-se ao vértice, que é a origem (0,0,0).
- Traços nos planos coordenados, interseções da superfície S com os respectivos planos coordenados:
  - com o plano xy: $z = 0$ é a origem (0,0,0);
  - com o plano xz: $y = 0$ é uma parábola;
  - com o plano yz: $x = 0$ é uma parábola.

Exemplo 31. *O gráfico mostra um Parabolóide com eixo de simetria ao longo do eixo z interseção com plano xz. Pela figura é possível observar que a interseção é uma parábola, que pela equação 2.16 reduz-se a $x^2 = a^2 z$.*

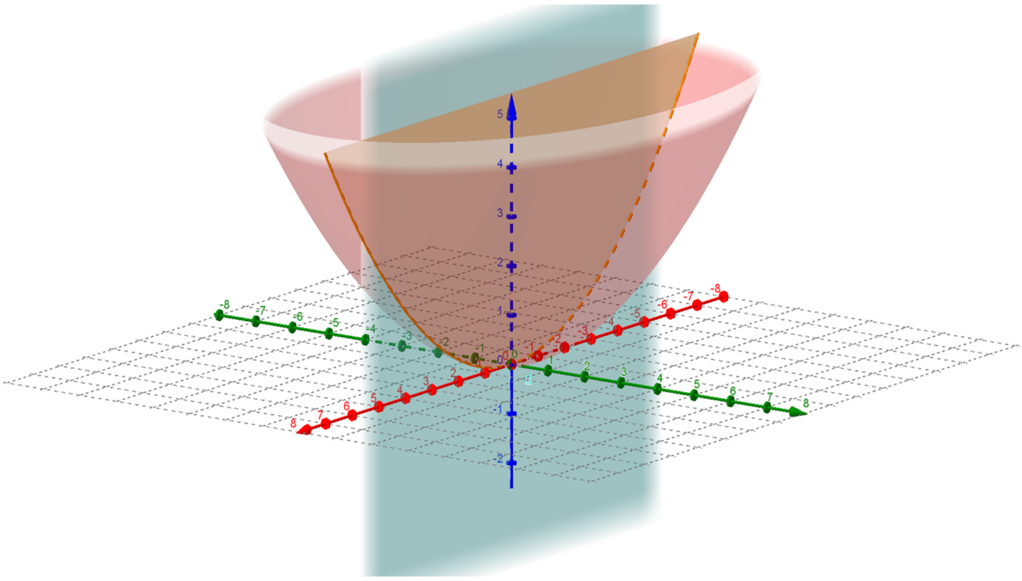


Figura 2.23: Parabolóide interseção com plano xz.

Exemplo 32. *O gráfico mostra um Parabolóide com eixo de simetria ao longo do eixo z interseção com plano yz. Pela figura é possível observar que a interseção é uma parábola, que pela equação 2.16 reduz-se a $y^2 = a^2 z$.*

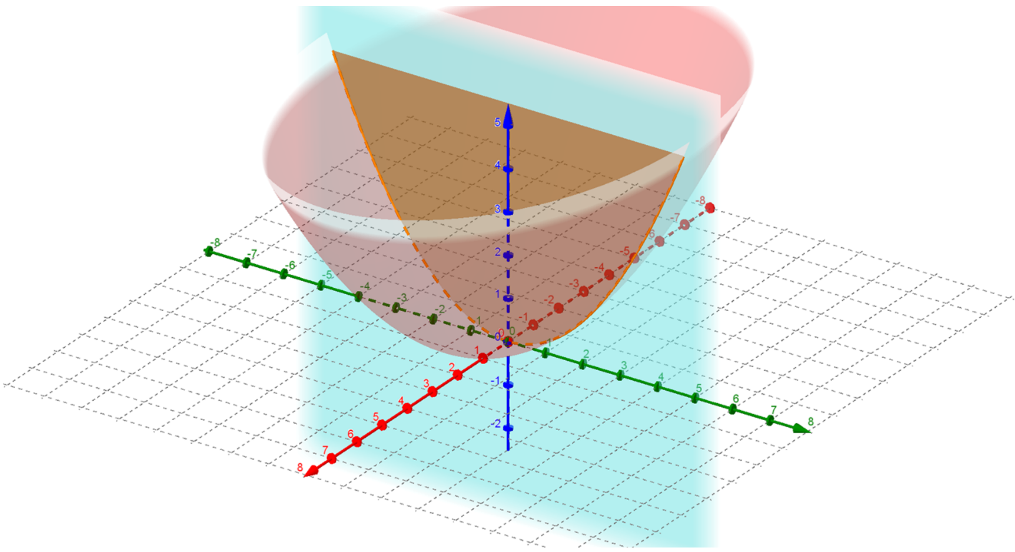


Figura 2.24: Parabolóide interseção com plano yz.

As outras duas formas para a equação dos Parabolóides são:

Eixo Oy	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=by$
Eixo Ox	$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=ax$

Os traços nos planos $z = k$, se $k < 0$ a interseção é vazia,quando a concavidade da superfície está voltada para o semieixo positivo de Oz, para $k > 0$, será uma elipse para $a \neq b$ ou circunferência para $a = b$. Nos planos $y = k$ e $x = k$, são parábolas, fazendo variar o valor de k, obtemos parábolas congruentes.

Exemplo 33. *Parabolóide elíptico interseção com plano* $x = 2$*, paralelo ao plano coordenado* yz*.*

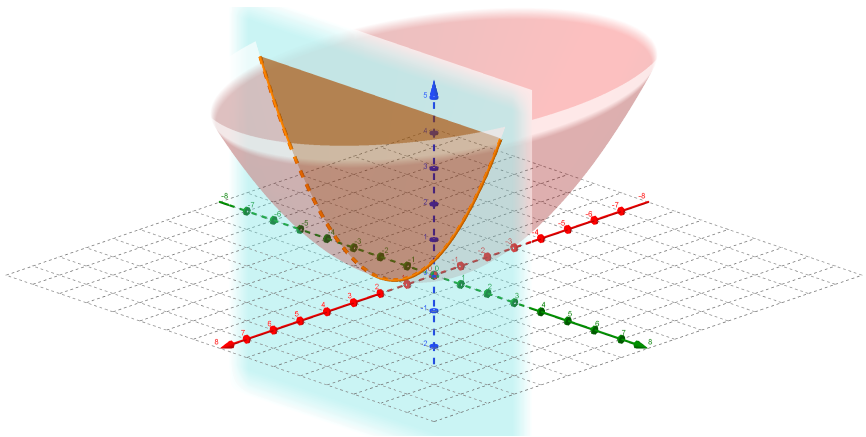


Figura 2.25: Parabolóide interseção com plano paralelo ao plano yz.

Exemplo 34. *Parabolóide elíptico interseção com plano* $z = 3$*, paralelo ao plano coordenado* xy*.*

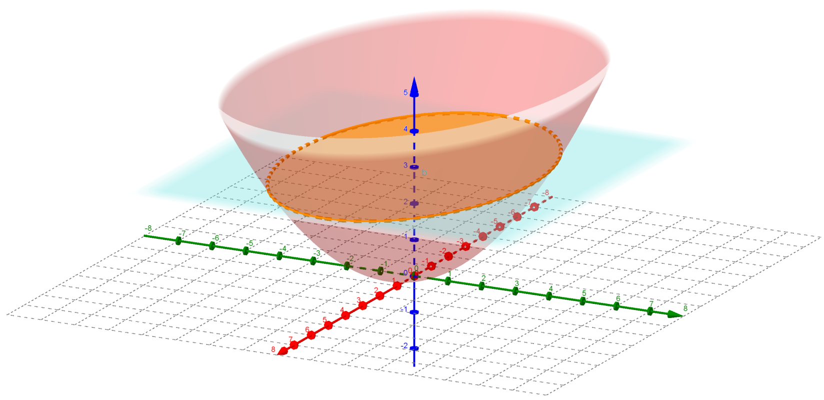


Figura 2.26: Parabolóide elíptico interseção com plano paralelo ao plano xy.

2.1.8 Parabolóide Hiperbólico

Se nas equações 2.15 os coeficientes dos termos de segundo grau tiverem sinais contrários, a equação representa um parabolóide hiperbólico. A Equação a seguir representa um parabolóide ao longo do eixo Oz,

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = cz. \tag{2.17}$$

As outras duas formas para a equação dos Parabolóides hiperbólicos são:

Eixo Oy	$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = by$
Eixo Ox	$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = ax$

É possível verificar pela equaçao 2.17, que a superfície é simétrica em relação aos planos xz e yz e em relação ao eixo Oz.

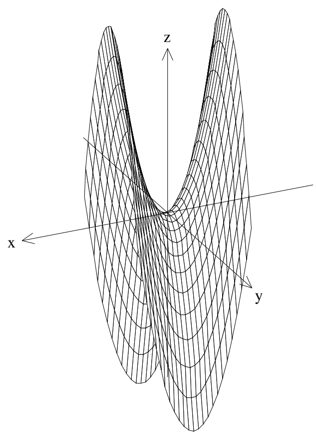


Figura 2.27: Parabolóide Hiperbólico ao longo do eixo Oz.

Estudo da Superfície

Para esboçar o gráfico da superfície, vamos fazer uma análise através da equação 2.17, examinando suas interseções com planos coordenados, planos paralelos aos planos coordenados e com os eixos de coordenados.

- Interseções com os eixos coordenados:
  - A interseção da superfície com qualquer dos três eixos coordenados reduz-se ao vértice, que é a origem (0,0,0).
- Traços nos planos coordenados, interseções da superfície S com os respectivos planos coordenados:

– com o plano xy: $z = 0$ é a origem (0,0,0);

– com o plano xz: $y = 0$ é uma parábola;

– com o plano yz: $x = 0$ é uma parábola.

Exemplo 35. *O Parabolóide hiperbólico mostra que a superfície é simétrica em relação aos planos xz e yz e ao eixo Oz, mas não é simétrico em relação ao demais eixos e ao plano xy.*

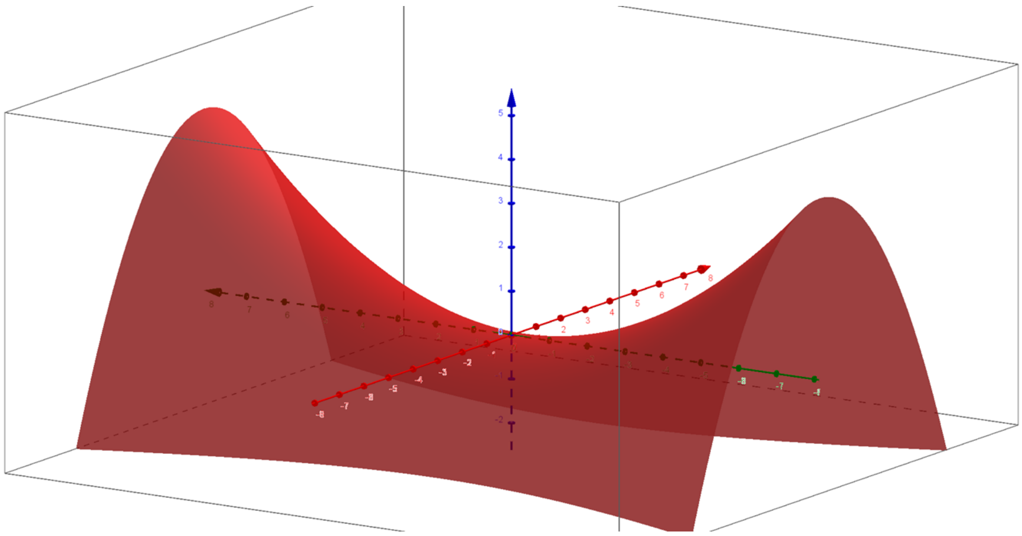


Figura 2.28: Parabolóide Hiperbólico - ”sela”

Exemplo 36. *A interseção do Parabolóide hiperbólico com o plano yz, mostra um parábola.*

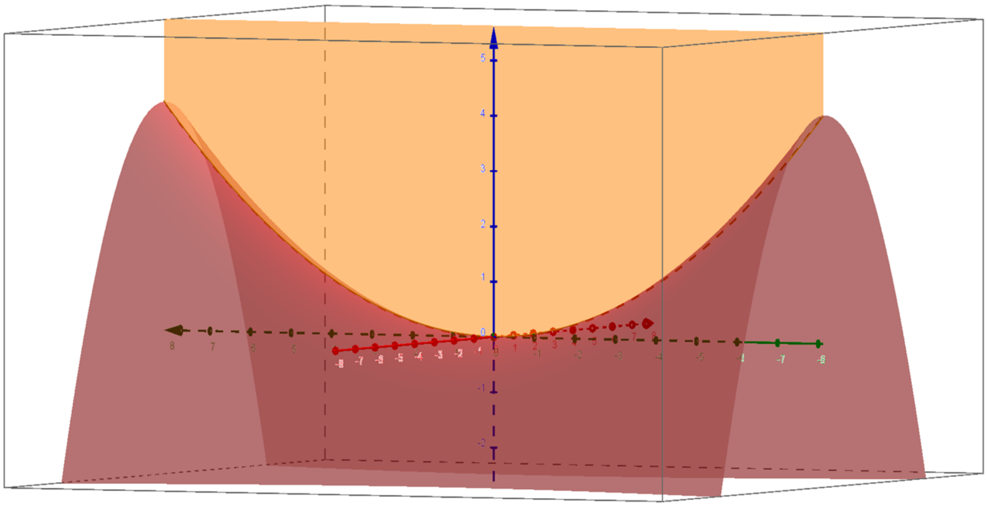


Figura 2.29: Parabolóide Hiperbólico interseção com plano yz.

A figura apresenta um parabolóide hiperbólico interseção com o plano $z = k$ que é uma hipérbole. Vale ressaltar que tanto para $k > 0$ como $k < 0$ a interseção com a superfície são hipérboles, a primeira com eixo real paralelo ao eixo Oy e a segunda paralelo ao eixo Ox.

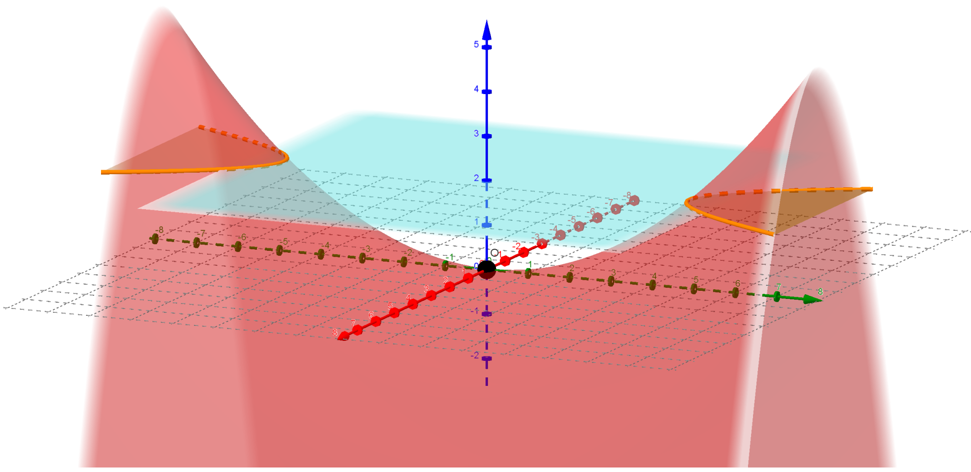


Figura 2.30: A hipérbole com eixo real paralelo ao eixo Oy.

2.1.9 Agora tente resolver!

1. Identifique cada superfície e faça um estudo da cada uma:

   (a) $16x^2 + 25y^2 + 20z^2 = 400$

   (b) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{16} = 1$

   (c) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$

   (d) $45x^2 + 9y^2 - 15z^2 = 225$

   (e) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} + \dfrac{z^2}{4} = 1$

   (f) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{z^2}{2} = 1$

   (g) $-\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{z^2}{2} = 1$

   (h) $z = -\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{4}$

   (i) $z = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{4}$

2.1.10 Superfície Cônica

Considere a reta $z = ky$ no plano $x = 0$, se a rotacionarmos em torno do eixo Oz, resulta-se numa superfície cônica circular, conforme a Figura, 2.31. A reta denominamos de geratriz da superfície.

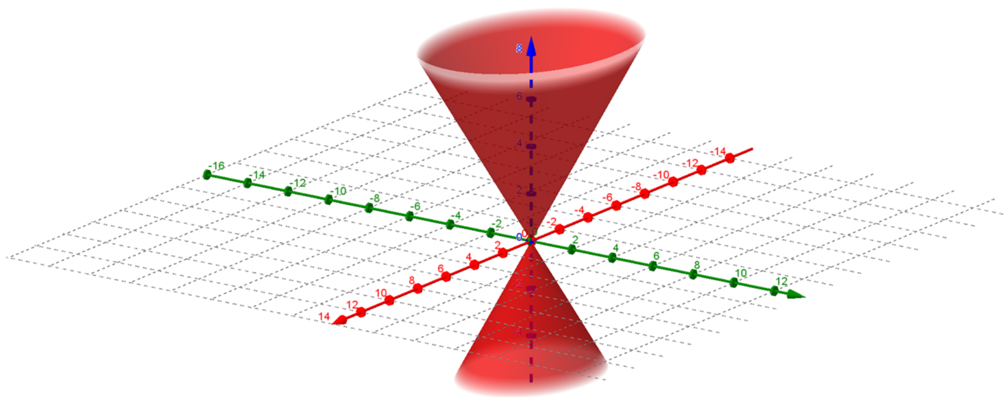


Figura 2.31: Superfície Cônica ao longo do eixo z.

Para obtermos a equação da superfície, substituímos na y na equação da reta por $\pm\sqrt{x^2+y^2}$, no qual resulta:

$$z^2 = k^2(x^2+y^2) \tag{2.18}$$

ou

$$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \tag{2.19}$$

Se $a = b$ a superfície será uma cônica de rotação e se $a \neq b$ a superfície será uma cônica elíptica, ao longo do eixo Oz. Ela é totalmente simétrica em relação ao sistema de coordenadas e a origem é o único ponto comum com os eixos. A origem separa as duas folhas.

Estudo da Superfície

Para esboçar o gráfico da superfície, vamos fazer uma análise examinando suas interseções com planos paralelos aos coordenados e com os eixos de coordenados.

- Interseções com os eixos coordenados:
  - A interseção da superfície com qualquer dos três eixos coordenados reduz-se ao vértice, que é a origem (0,0,0).
- Traços nos planos coordenados, interseções da superfície S com os respectivos planos coordenados:
  - com o plano xy: $z = 0$ é a origem (0,0,0), planos $z = k$ temos elipses com centros em Oz;
  - com o plano xz: $y = 0$ são retas concorrentes $z = \pm\frac{x}{a}$, planos $y = k$ são hipérboles, com centros em Oy;
  - com o plano yz: $x = 0$ são retas concorrentes $z = \pm\frac{y}{b}$, planos $x = k$ são hipérboles, com centros em Ox.

Exemplo 37. *Superfície Cônica interseção com um plano paralelo ao plano yz, cuja interseção é uma hipérbole com centro no eixo Ox.*

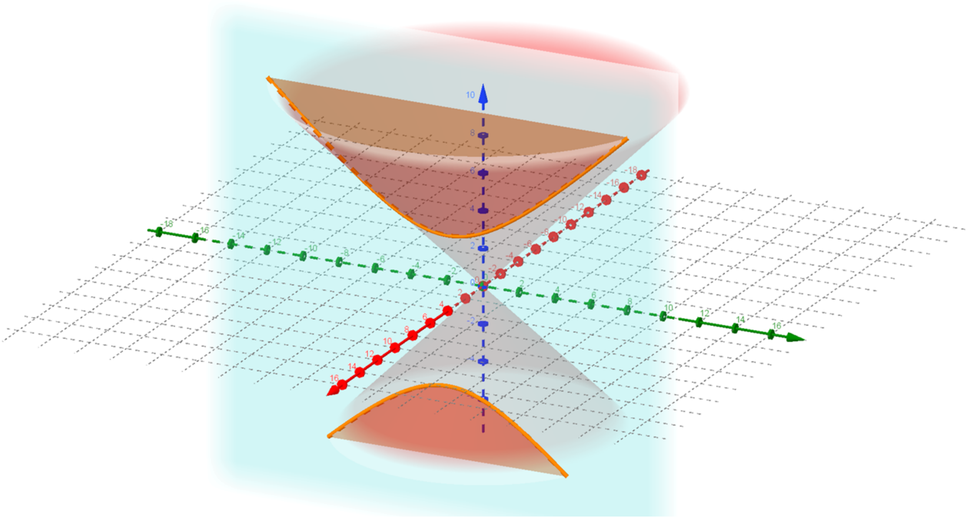


Figura 2.32: Superfície Cônica interseção com o plano $x = 4$.

Exemplo 38. *Superfície Cônica interseção com um plano paralelo ao plano xy, cuja interseção é uma elipse com centro no eixo Oz.*

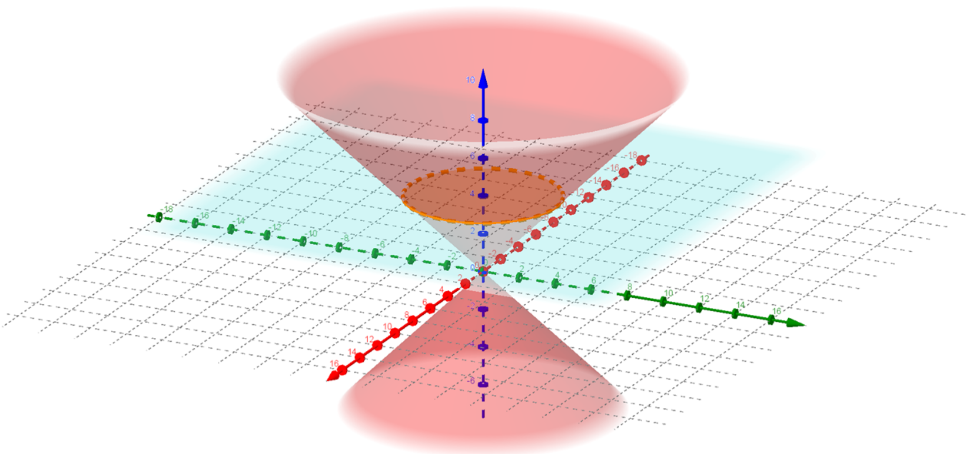


Figura 2.33: Superfície Cônica interseção com o plano $z = 4$.

As outras duas formas para a equação da Superfície Cônica são:

Eixo Oy	$y^2 = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2}$
Eixo Ox	$x^2 = \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}$

Exemplo 39. *Superfície Cônica ao longo do eixo Ox.*

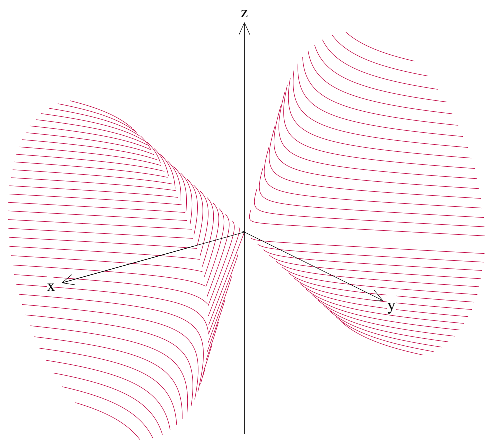


Figura 2.34: Superfície Cônica.

Exemplo 40. *Qual a equação da superfície cônica gerada de uma reta de equação $z = 4y$, $x = 0$, no plano yOz que gira em torno do eixo Oz.*

Solução: Substituindo na equação equação da reta, y por $\pm\sqrt{x^2+y^2}$, temos

$$z = \pm 4\sqrt{x^2+y^2} \to z^2 = 16(x^2+y^2)$$

2.1.11 Superfície Cilíndrica

É uma superfície gerada por uma reta que se move paralelamente a uma reta fixa e passando por uma curva fixa dada. Pela Figura 2.35, observamos que r é a reta fixa, g é a reta que se move paralelamente a reta r - geratriz da superfície e d é a curva fixa - diretriz da superfície.

Chamamos de Superfície cilíndrica elíptica ou Superfície cilíndrica hiperbólica ou Superfície cilíndrica parabólica, se existem números reais positivos a, b e c e um sistema ortogonal em relação ao qual pode ser escrita respectivamente, pelas equações

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{2.20}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{2.21}$$

$$y^2 = cx \tag{2.22}$$

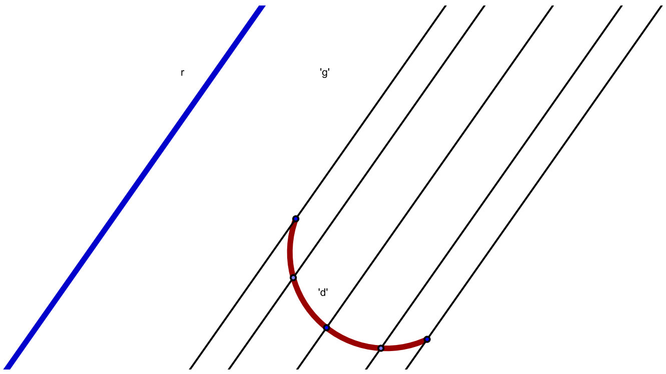


Figura 2.35: Definição.

E pode ser chamada de Superfície cilíndrica de rotação ou circular se existir um número real positivo a, que pode ser descrita pela equação

$$x^2 + y^2 = a^2 \tag{2.23}$$

Com exceção da Superfície cilíndrica parabólica, as demais são simétricas em relação aos eixos coordenados.

Quanto a diretriz, a superfície cilíndrica será circular, parabólica, elíptica ou hiperbólica se a diretriz for uma circunferência, uma parábola, uma elipse ou uma hipérbole.

As Figuras 2.36 e 2.37 apresentam alguns exemplos de superfícies cilíndricas com geratrizes paralelas ao eixo z.

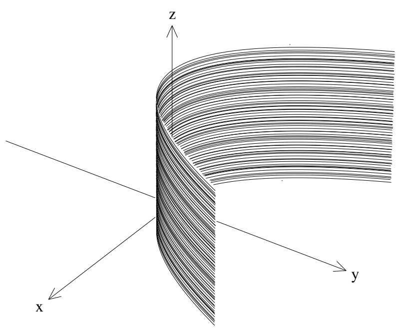


Figura 2.36: Superfície cilíndrica parabólica, "calha".

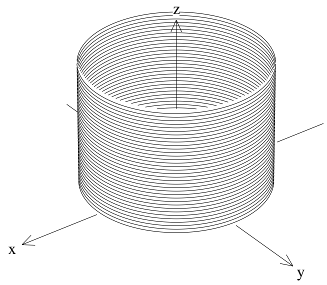


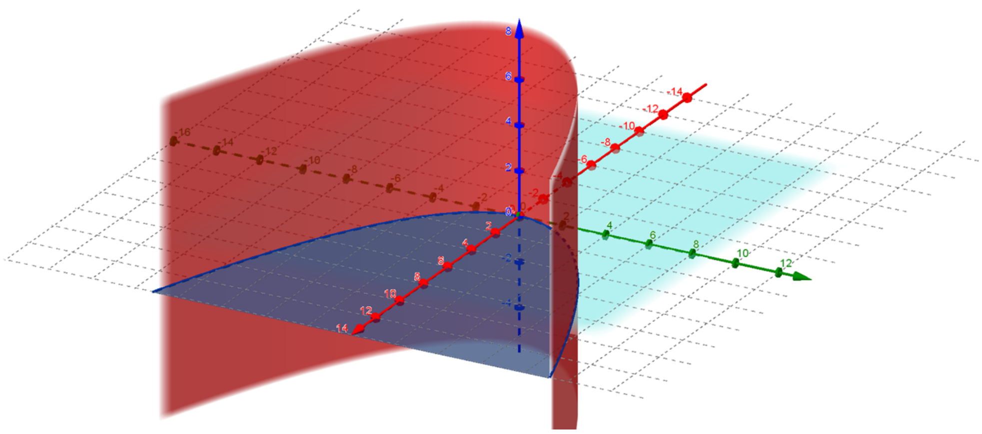
Figura 2.37: Superfície cilíndrica circular.

Exemplo 41. *Construir o gráfico das seguintes equações de superfícies cilíndricas:*

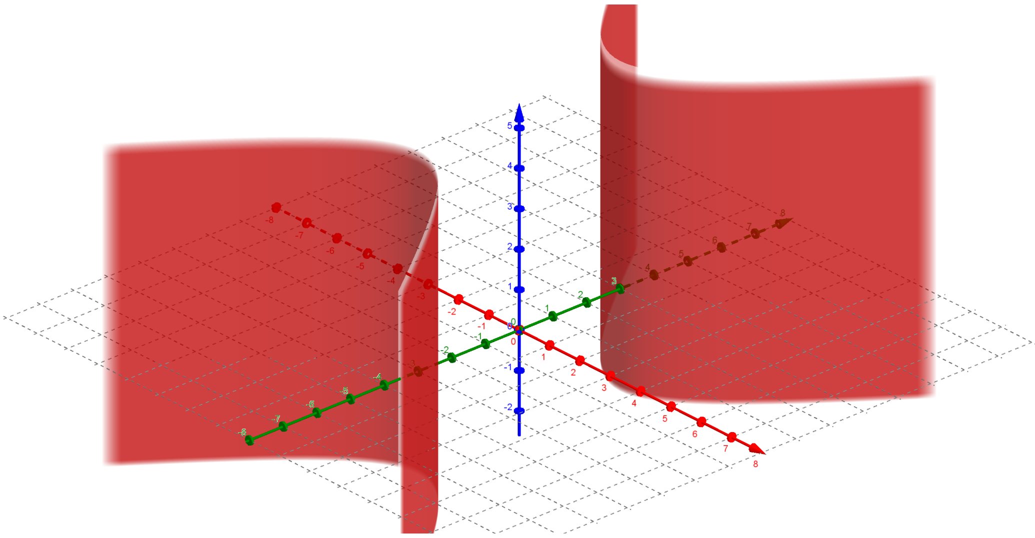
1. $y^2 = 6x$
2. $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{4} = 1$

Solução:

Para a equação $y^2 = 6x$, temos que sua diretriz é uma parábola com eixo de simetria no eixo x. Também conhecida como calha, devido ao seu formato.



Para a equação $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{4} = 1$, temos que sua diretriz é uma hipérbole, então, a superfície cilíndrica hiperbólica se desenvolve ao longo do eixo z.



Estudo da Superfície

Para esboçar o gráfico da superfície cilíndrica, vamos utilizar outro recurso, propiciado pelo fato de uma das variáveis estar ausente na equação:

- Com relação a geratriz, o gráfico de uma equação que não contém uma determinada variável corresponde a uma superfície cilíndrica cuja geratriz é paralela ao eixo da variável ausente.

- Com relação a diretriz o gráfico da equação dada está no plano correspondente.

Exemplo 42. *Superfície cilíndrica circular de equação $y^2 + z^2 = 9$, a curva (circunferência) é a diretriz e está no plano yz e a superfície se desenvolve ao longo do eixo x que corresponde a variável ausente. Nos gráficos a seguir temos a superfície ao longo do eixo x e a interseção da superfície com o plano yz em que $x = 0$, identificando a diretriz.*

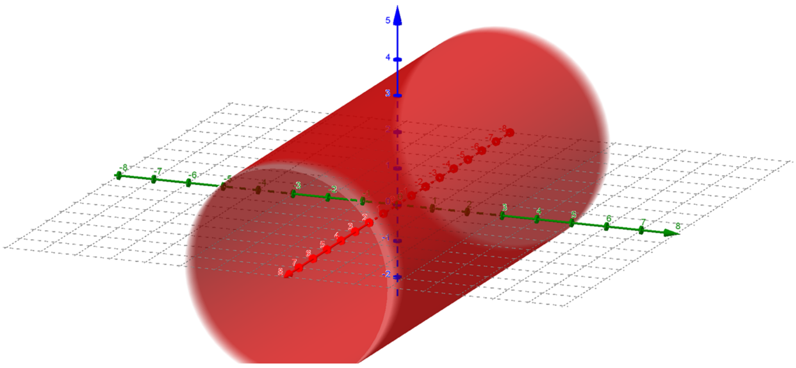


Figura 2.38: Superfície cilíndrica circular.

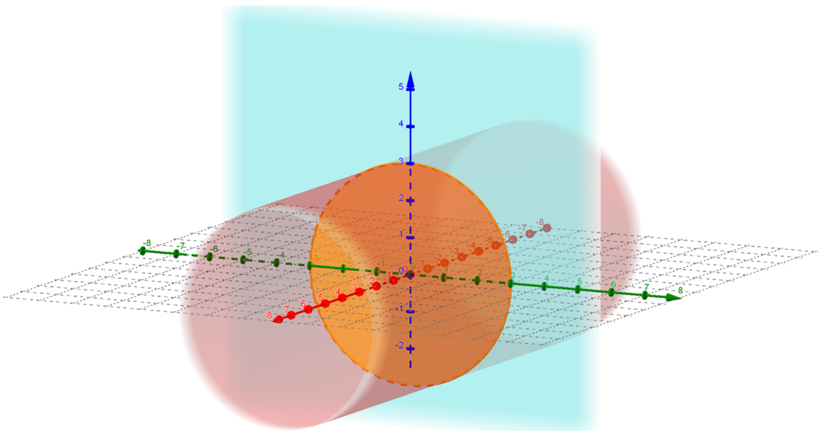


Figura 2.39: Superfície cilíndrica circular.

2.1.12 Agora tente resolver!

1. Identifique, em cada caso a superfície descrita e comente sua posição em relação aos eixos coordenados:

   (a) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{b^2} = 1$

   (b) $\dfrac{z^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$

   (c) $z^2 = cy$

   (d) $y^2 = cz$

   (e) $y^2 = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{b^2}$

2. Esboce cada uma das superfícies:
   (a) $x^2 + y^2 = 4$
   (b) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{z^2}{9} = 1$
   (c) $y^2 = 8x$
   (d) $z^2 = \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{z^2}{4}$

2.2 Lista de exercícios: Superfícies

1. Reduzir cada uma das equações à forma canônica, se necessário, identificar o gráfico da quádrica que ela representa e fazer o estudo da superfície:
   (a) $9x^2 + 4y^2 + 36z^2 = 36$
   (b) $36x^2 + 9y^2 - 4z^2 = 36$
   (c) $36x^2 - 9y^2 - 4z^2 = 36$
   (d) $x^2 + y^2 + z^2 = 36$
   (e) $x^2 + y^2 - 9z = 0$
   (f) $x^2 - y^2 + 2z^2 = 4$
   (g) $2x^2 + 4y^2 + z^2 - 16 = 0$
   (h) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 8 = 0$
   (i) $4x^2 - y^2 + 4z^2 - 4 = 0$
   (j) $z^2 - 4x^2 - 4y^2 = 4$
   (k) $4x^2 - 2y^2 + z^2 - 24x - 4y + 8z + 42 = 0$
   (l) $9x^2 + 4y^2 + 9z = 0$
   (m) $y^2 + 4z^2 - x = 0$
   (n) $z = y^2 - x^2$
   (o) $x^2 + 4z^2 - 8y = 0$

Capítulo 3

Coordenadas Polares, Cilíndricas e Esféricas

3.1 Coordenadas Polares

No sistema de coordenadas cartesianas, um ponto no plano é localizado por um par ordenado (x,y) de números reais.

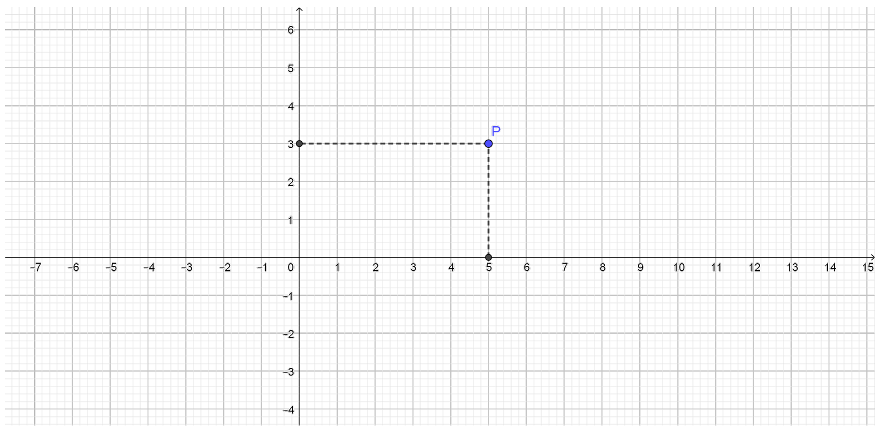


Figura 3.1: Sistema de coordenadas cartesianas.

Uma outra forma de localizar um ponto no plano é através de suas coordenadas polares. Nesse sistema, fixamos uma origem O, chamada polo, uma semirreta orientada, chamada de eixo polar a partir de O.

Um ponto em coordenadas polares é o par (r,θ). A distância da origem (polo) até o ponto P é o raio r. O ângulo θ é o ângulo orientado a partir do eixo polar até o segmento OP e deve ser expresso em radianos, observe a Figura 3.12.

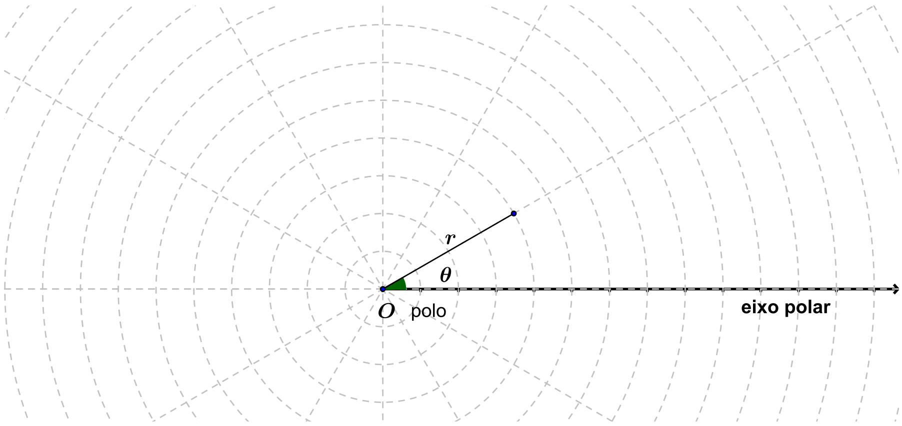


Figura 3.2: Sistema de coordenadas polares

O sentido positivo é o sentido trigonométrico (anti-horário). A semirreta denominada eixo polar tem o mesmo sentido do semieixo positivo do eixo Ox.

Para marcar um ponto em coordenadas polares, primeiro marcamos o ângulo (observar o sentido), depois a distância r que o ponto está da origem.

O raio r também pode ser negativo, nesse caso, marcamos primeiro o ângulo, construímos uma semirreta considerando um ângulo θ em relação ao eixo polar e estendemos essa semirreta marcando o ponto $(-r,\theta)$ como sendo o ponto sobre a extensão da semirreta que dista r do polo. Assim, notamos que cada par (r,θ) no plano pode ser representado por infinitos pares de coordenadas polares, conforme a Figura 3.3.

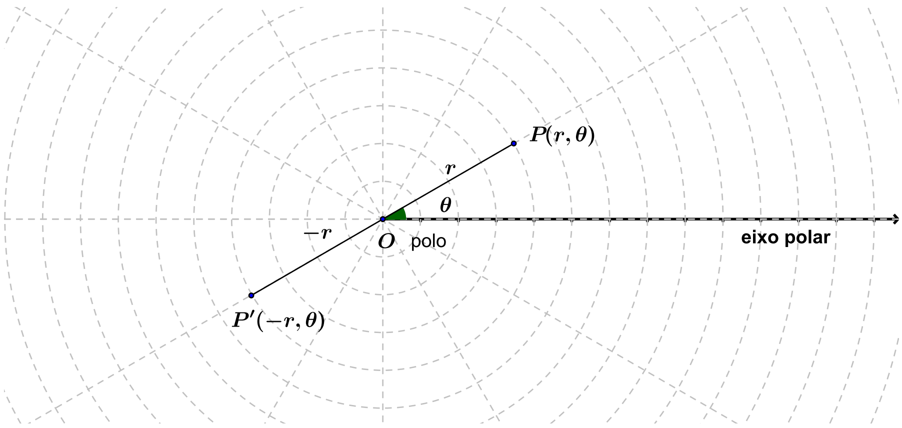


Figura 3.3: Marcando um ponto $(-r,\theta)$.

3.1.1 Conjunto Principal

Diferente do sistema cartesiano, no sistema de coordenadas polares um ponto tem infinitos pares que o representam. Mas todo ponto distinto da origem possui pelo menos uma coordenada na qual o raio é positivo $r > 0$ e o ângulo $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

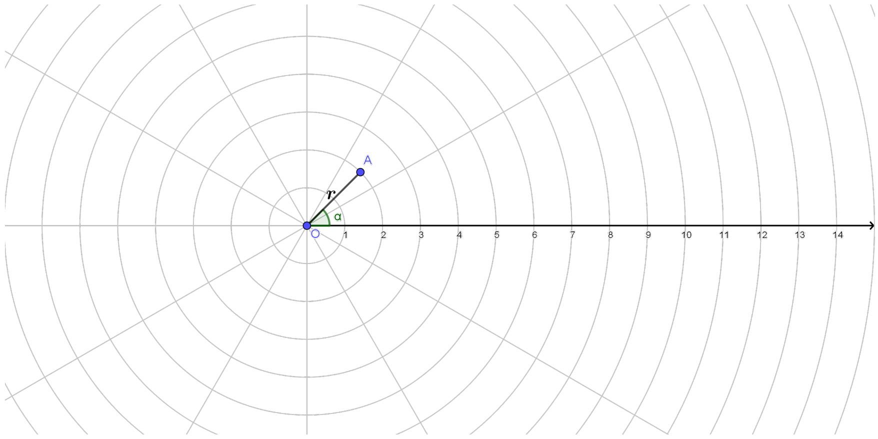


Figura 3.4: Ponto em coordenadas polares.

Exemplo 43. *Se $r = 2$ (2 unidades medida) e na semirreta $\theta = \frac{\pi}{6}$, então temos o ponto $P_1(2, \frac{\pi}{6})$.*

Observem que r é positivo quando medido do polo ao ponto sobre o lado terminal do ângulo θ.

E, nesse caso, para $r = 2$ e $\theta = (\frac{-11\pi}{6})$ temos o ponto $P_2(2, \frac{-11\pi}{6})$ que também representa o mesmo ponto. Observem o gráfico 3.5.

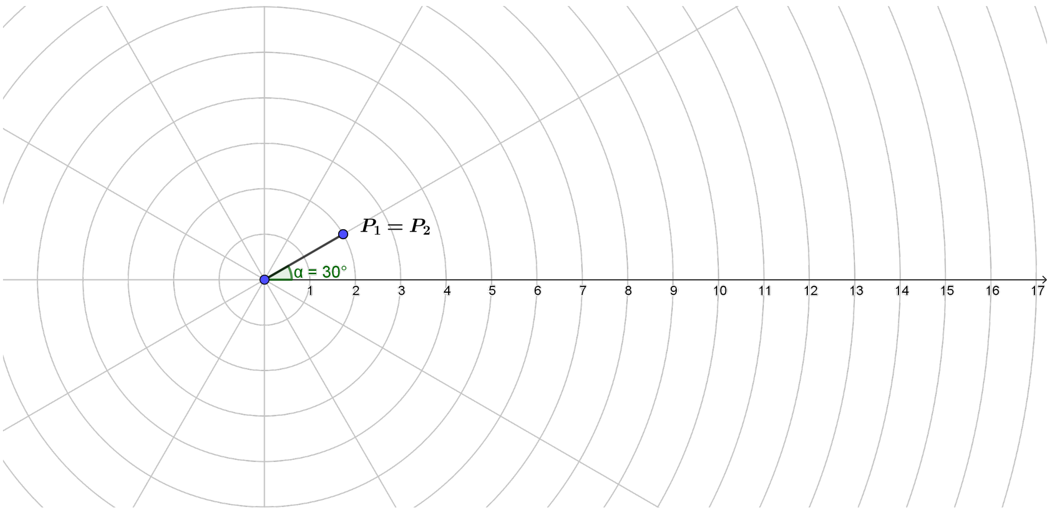
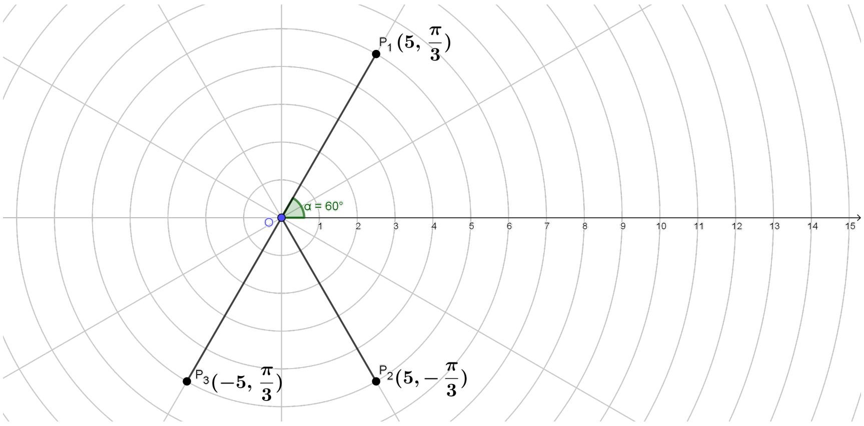


Figura 3.5: Um ponto tem infinitos representantes em coordeadas polares.

Exemplo 44. *Representando pontos em coordenadas polares.*



3.1.2 Agora tente resolver!

1. Represente graficamente cada um dos seguintes pontos dados em coordenadas polares:

   (a) $(4,\dfrac{\pi}{4})$

   (b) $(4,-\dfrac{\pi}{4})$

   (c) $(-4,\dfrac{\pi}{4})$

   (d) $(-4,-\dfrac{\pi}{4})$

   (e) $P_1(-3,\frac{4\pi}{3})$

   (f) $P_2(2,\frac{2\pi}{3})$

   (g) $P_3(4,\frac{11\pi}{6})$

   (h) $P_4(-5,\frac{\pi}{3})$

   (i) $P_5(6,\dfrac{3\pi}{4})$

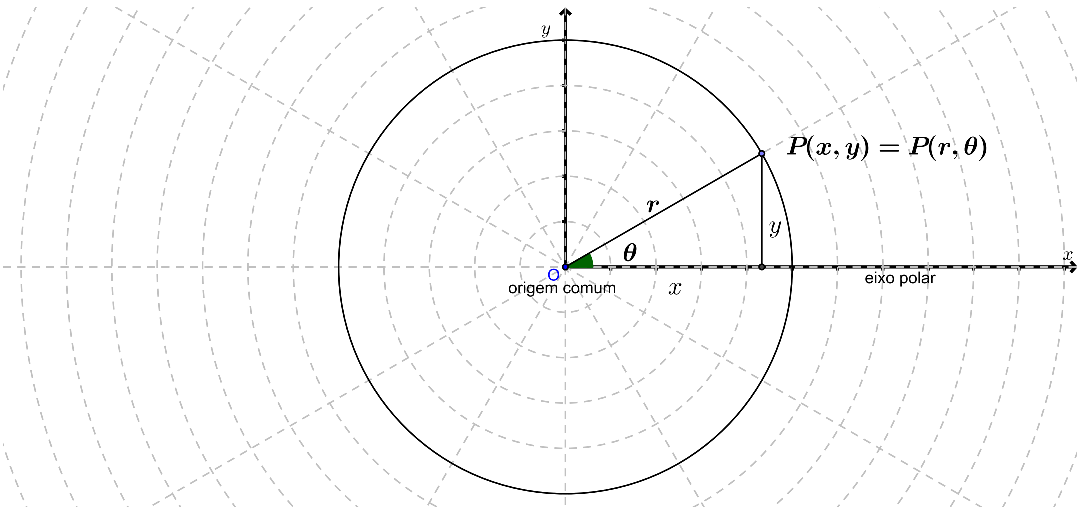
3.2 Mudanças de Coordenadas

Suponha que P seja um ponto cuja representação em coordenadas cartesianas retangulares é (x,y) e em coordenadas polares (r,θ) e suponha ainda para facilidade de compreensão que o polo e o eixo polar do Sistema de coordenadas polares coincidem com a origem e o eixo x do sistema de coordenadas cartesianas, respectivamente. Consideremos o caso em que $r > 0$, então o ponto P está no lado terminal do ângulo θ radianos. Assim,

$$r = |OP|$$

Então: $\cos(\theta) = \dfrac{x}{|OP|} = \dfrac{x}{r}$ e $\sin(\theta) = \dfrac{y}{|OP|} = \dfrac{y}{r}$.
Portanto,

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\theta) \\ y &= r\sin(\theta) \end{aligned} \tag{3.1}$$



A partir das equações (3.1) é possível obter a transformação de Coordenadas Polares (se forem conhecidas) para Coordenadas Cartesianas.

Para obtermos fórmulas que dão o conjunto de coordenadas polares de um ponto quando suas coordenadas cartesianas retangulares são conhecidas, elevamos ao quadrado ambos os lados das equações (3.1) e obtemos:

$$\begin{aligned} x^2 &= r^2\cos^2(\theta) \\ y^2 &= r^2\sin^2(\theta) \end{aligned}$$

Igualando a soma dos membros esquerdos com a soma dos membros direitos acima,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta) \\ x^2 + y^2 &= r^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) \\ x^2 + y^2 &= r^2 \\ r &= \pm\sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Lembrando que $\tan(\theta) = (\dfrac{y}{x})$ e que a função arco-tangente tem imagens restritas ao intervalo aberto $(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$, o valor do ângulo θ pode ser obtido por meio de uma das expressões:

$$\theta = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}), se\, x > 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) + \pi, se\, x < 0 \\ \dfrac{\pi}{2}, se\, x = 0\, e\, y > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2}, se\, x = 0\, e\, y < 0 \end{cases}$$

Para ilustrar a aplicação das fórmulas anteriores, apresentamos dois exemplos.

Exemplo 45. *Converta o ponto* $(-1,\sqrt{3})$ *para coordenadas polares.*

Solução:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$r = 2$$

Observe que $x < 0$, $(x = -1)$ e que o ponto está localizado no segundo quadrante.

$$\theta = \arctan(\frac{y}{x}) + \pi = \arctan(\frac{\sqrt{3}}{-1}) + \pi$$

$$\theta = \arctan(-\sqrt{3}) + \pi$$

$$\theta = \arctan -\frac{\pi}{3} + \pi$$

$$\theta = \frac{2\pi}{3}$$

Assim, o ponto em coordenadas polares é $(2,\dfrac{2\pi}{3})$.

Exemplo 46. *Converta o ponto* $(2,\dfrac{\pi}{2})$ *para coordenadas cartesianas.*

Solução:

$$x = 2\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$$

$$y = 2\sin(\frac{\pi}{2}) = 2$$

Assim, o ponto em coordenadas cartesianas é (0,2).

3.2.1 Agora tente resolver!

1. Determine as coordenadas cartesianas dos seguintes pontos:

   (a) $A(7,\pi)$

   (b) $B(5,-\frac{\pi}{6})$

   (c) $C(4,\frac{2\pi}{3})$

   (d) $D(3,\frac{3\pi}{4})$

   (e) $D(4,\frac{\pi}{3})$

2. Determine as coordenadas polares dos seguintes pontos:

   (a) $A(-2{,}2\sqrt{3})$
   (b) $B(4,-4)$
   (c) $C(\frac{3}{2}\sqrt{2},-\frac{3}{2}\sqrt{2})$
   (d) $D(2{,}2)$

3.3 Equações Polares

3.3.1 Círculo

Para obtermos a equação polar de um círculo, considere um ponto P sobre o círculo de raio a, cujo centro é o ponto P_0, conforme a Figura 3.6. Aplicando a lei dos cossenos no triângulo OP_0P, temos

$$a^2 + r_0^2 + r^2 - 2r_0 r\cos(\theta - \theta_0) = 0 \tag{3.2}$$

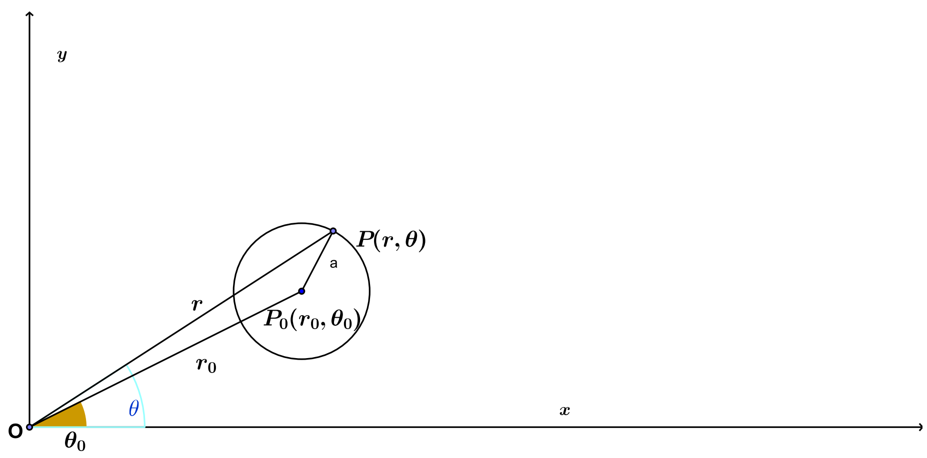


Figura 3.6: Círculo de centro em P_0.

Desta forma, obtemos todos os pontos do círculo quando o ângulo θ varia no intervalo $0 \le \theta < 2\pi$. A partir da equação 3.2 obtemos todas as variações para a equação polar do círculo.

Quando $r_0 = 0$, o círculo de raio a com centro no polo (0,0), a equação 3.2 resulta em: $r^2 = a^2$, portanto, a equação do círculo de raio $|a|$ centrado em (0,0) é

$$r = a.$$

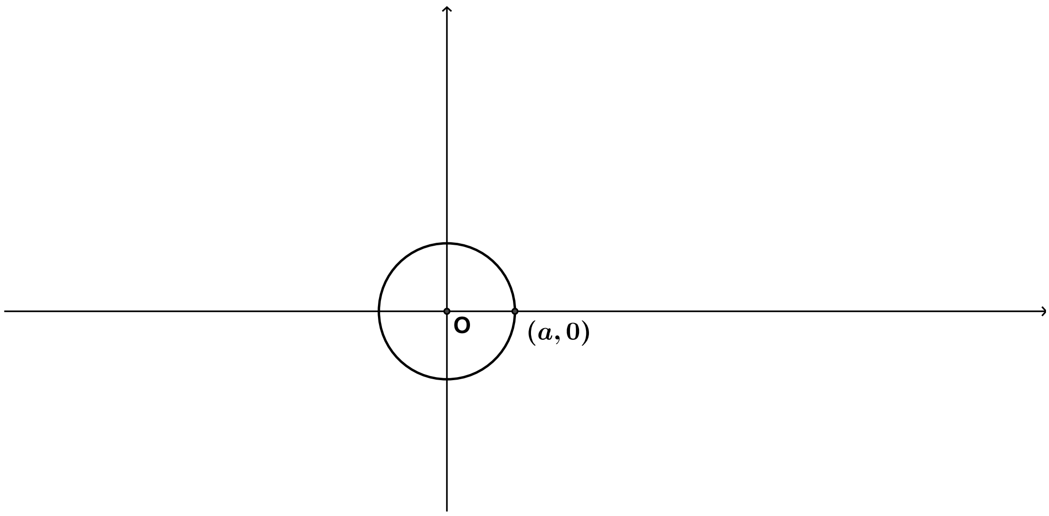


Figura 3.7: Círculo de centro em $O(0,0)$.

Se $r_0 = 0$ e $\theta_0 = 0$, a equação 3.2 do círculo de raio a com centro em $(a,0)$, fica $r^2 = 2ar\cos\theta$, então,

$$r = 2a\cos\theta.$$

Desta forma, temos duas situações:

1. Se $a > 0$, o gráfico está à direta do polo;
2. Se $a < 0$, o gráfico está à esquerda do polo.

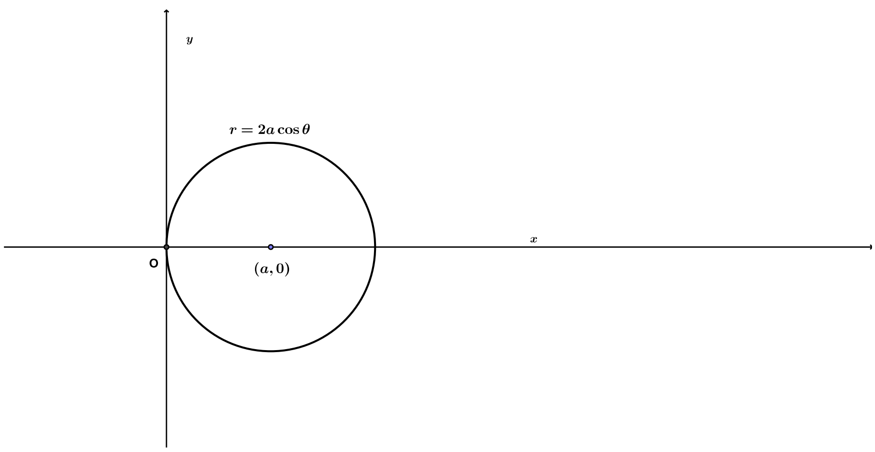


Figura 3.8: Círculo de centro em $C(a,0)$ à direita do polo.

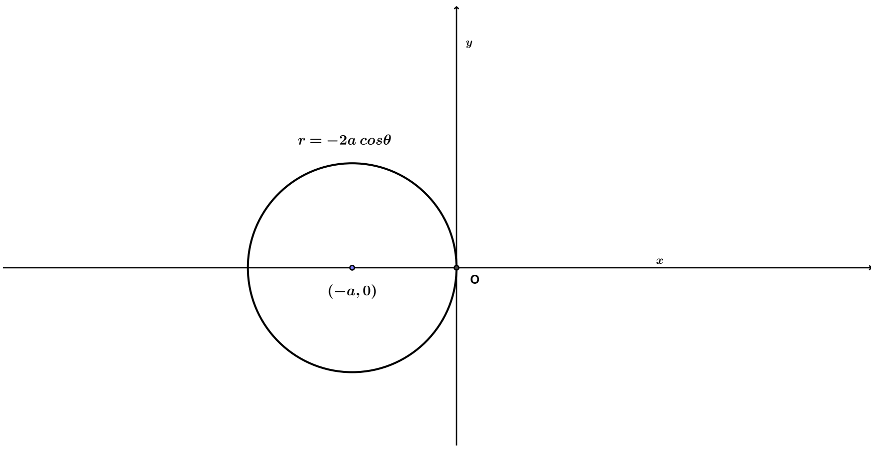


Figura 3.9: Círculo de centro em $C(-a,0)$ à esquerda do polo.

Tomando $r_0 = a$ e $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, a equação (3.2), de raio a e centro $(a,\frac{\pi}{2})$, obtemos: $r^2 = 2ar\cos(\theta - \frac{\pi}{2})$, assim

$$r = 2a\sin\theta.$$

Desta forma,

1. Se $a > 0$, o gráfico está à acima do polo;
2. Se $a < 0$, o gráfico está à abaixo do polo.

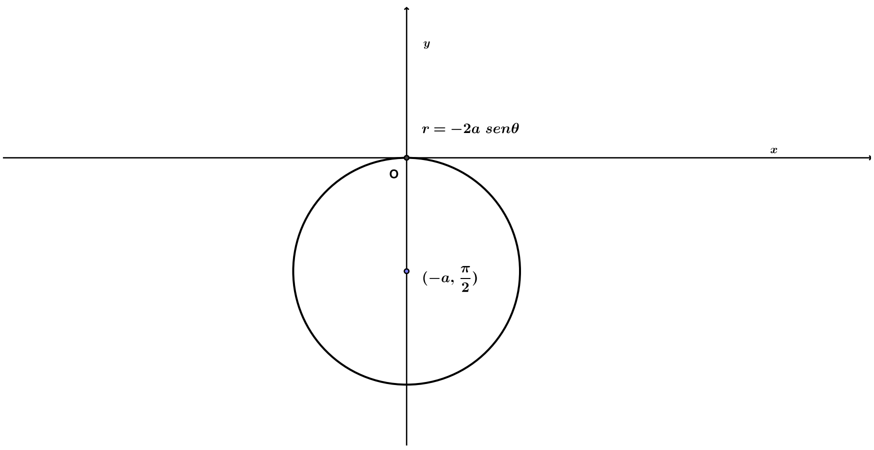


Figura 3.10: Círculo de centro em $C(-a,\frac{\pi}{2})$ abaixo do polo.

3.3.2 Retas

Vamos considerar um sistema $Or\theta$ (sistema de coordenadas polares). Determinemos o conjunto r dos pontos $P(r,\theta)$ que satisfazem a equação

$\theta = \dfrac{\pi}{6}$. Observe a Figura 3.11.

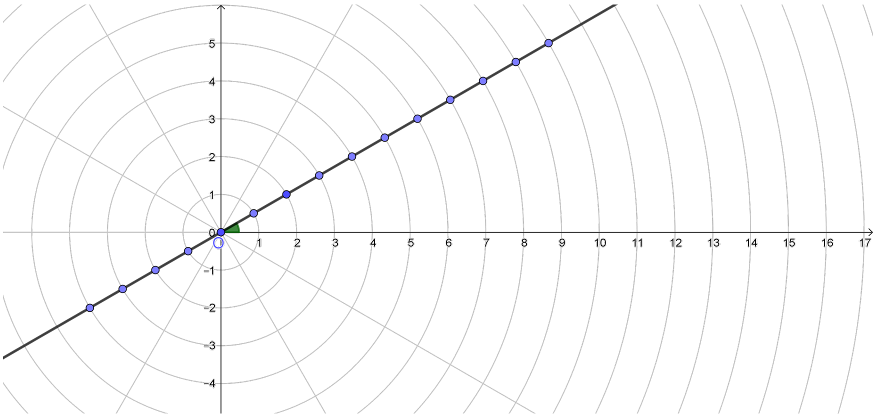


Figura 3.11: Reta em coordenadas polares.

Assim, o conjunto $r = \{(r,\theta)/\theta = \dfrac{\pi}{6}\}$ com $r \in \mathbb{R}$, r é a reta que passa pelo polo e tem equação $\theta = \theta_0$. Se a reta tem equação cartesiana da forma $y = ax$ (reta não vertical e que passa pela origem), com as equações de mudanças de coordenadas,

$$y = ax$$

$$rsen(\theta) = arcos(\theta)$$

$$sen(\theta) = acos(\theta)$$

$$tan(\theta) = a$$

Considerando que o coeficiente angular a é a tangente da inclinação θ_0 da reta:

$$tan(\theta) = tan(\theta_0)$$

Portanto, $\theta = \theta_0$.

Retas Verticais: para equação $x = a$, temos em coordenadas polares $rcos(\theta) = a$. Restringindo θ em $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$, podemos escrever $r = \dfrac{a}{cos(\theta)}$, ou

$$r = asec(\theta)$$

que é a equação em coordenadas polares de uma reta vertical passando por $(a,0)$.

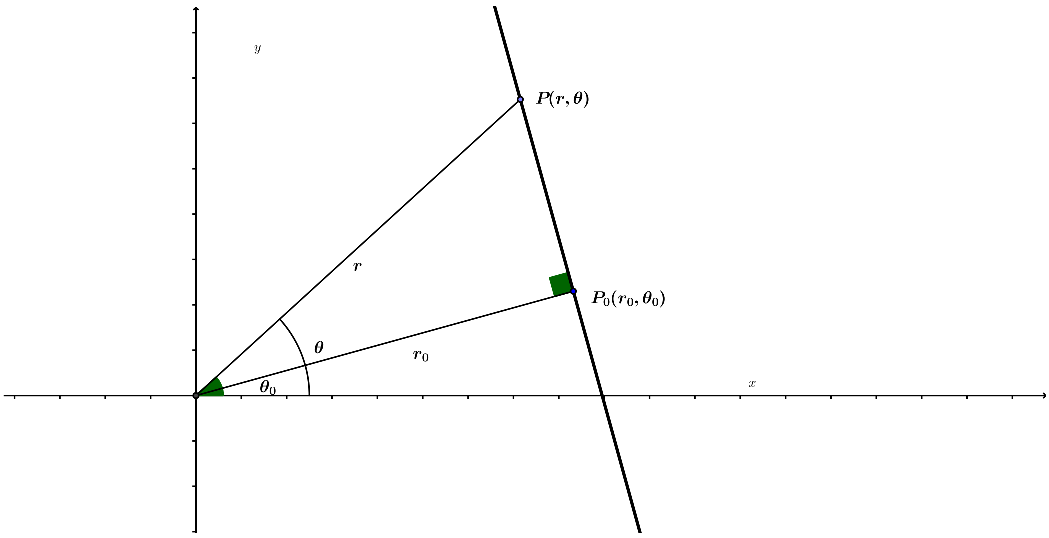
Retas Horizontais: para equação $y = a$, temos em coordenadas polares $rsen(\theta) = a$. Podemos reescrever como $r = a\dfrac{a}{sen(\theta)}$, ou

$$r = acossec(\theta)$$

em $0 < \theta < \pi$, que é a equação em coordenadas polares de uma reta horizontal passando por $(0,a)$.

Retas que não passam na origem: Se o ponto $P_0(r_0,\theta_0)$ é o pé da perpendicular a partir da origem até a reta L e $r_0 \geq 0$, então uma equação para a reta L é

$$r\cos(\theta - \theta_0).$$



Exemplo 47. *Sabendo que* $\cos(\theta-\theta_0) = \cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0$, *determine a equação cartesiana da reta* $r\cos(\theta - \pi/3) = 2$.

Solução:

$$r\cos(\theta - \pi/3) = r(\cos\theta\cos\pi/3 + \sin\theta\sin\pi/3) = 2$$

$$r(\cos(\theta - \pi/3) = r(\cos\theta\frac{1}{2} + \sin\theta\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2$$

$$r(\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta) = 4$$

Se $x = rcos\theta$ e $y = r\sin\theta$, então teremos $x + \sqrt{3}y = 4$ como equação da reta.

3.4 Equações Polares das Cônicas

Uma cônica é o lugar geométrico dos pontos P que satisfazem $|PF| = e|PD|$.

Antes de apresentar as equações polares das cônicas, vamos considerar a seguinte definição geométrica que incluirá a parábola, a elipse e a hipérbole.

Posicionando o foco na origem e a diretriz correspondente à direita da origem ao longo da reta vertical $x = k$. Desta forma, temos $PF = r$, e, $PD = k - FB = k - r\cos\theta$, conforme a Figura 3.12. Substituindo na equação foco diretriz da cônica, $|\overrightarrow{PF}| = e|\overrightarrow{PD}|$, tem-se

$$r = e(k - r\cos\theta),$$

da qual podemos isolar r, obtendo:

$$r = \frac{ke}{1 + e\cos\theta}. \tag{3.3}$$

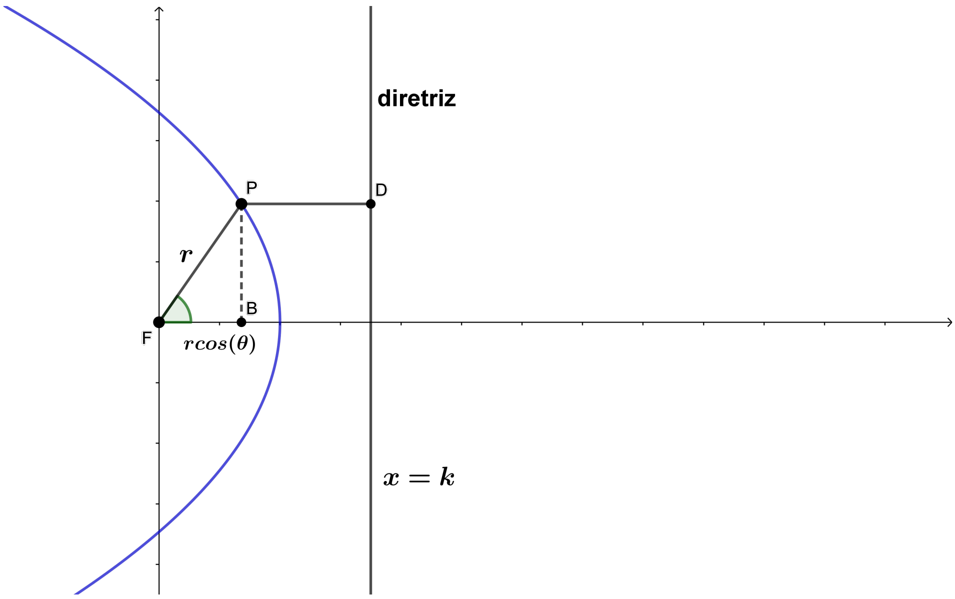


Figura 3.12: Definição da Equação polar das cônicas.

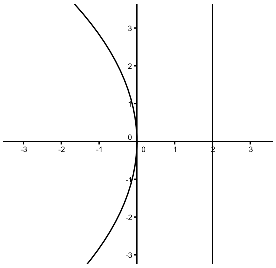
Onde $x = k > 0$ é a diretriz vertical. Portanto:

1. Se $e = 1$ então a cônica é uma Parábola;
2. Se $0 < e < 1$, então a cônica é uma Elipse;
3. Se $e > 1$, então a cônica é uma Hipérbole.

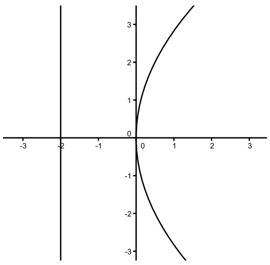
Toda cônica que não seja uma circunferência pode ser escrita pela relação 3.3. Podemos ter as variações desta equação dependendo da localização da diretriz. Se ela está na reta $x = -k$, à esquerda da origem (foco), substituímos a equação por

$$r = \frac{ke}{1 - e\cos\theta}.$$

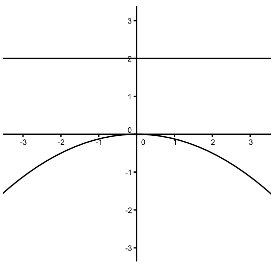
Se as equações das diretrizes são $y = k$ e $y = -k$, as equações envolvem senos. Abaixo apresentamos um resumo das situações possíveis.



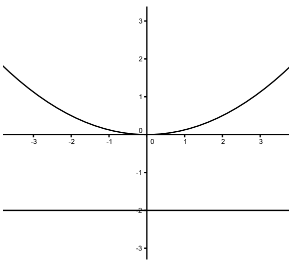
$$r = \frac{ke}{1 + e\cos\theta}$$



$$r = \frac{ke}{1 - e\cos\theta}$$



$$r = \frac{ke}{1 + e\sin\theta}$$



$$r = \frac{ke}{1 - e\sin\theta}$$

3.4.1 Agora tente resolver!

1. Determine a equação da hipérbole com excentricidade 2 e diretriz $x = 3$.

2. Determine a diretriz da parábola $r = \dfrac{25}{10 + 10\cos\theta}$

3. Identificar as cônicas:

   (a) $r = \dfrac{4}{2 + \cos\theta}$

   (b) $r = \dfrac{5}{2 - 2\cos\theta}$

   (c) $r = \dfrac{6}{3 + \sin\theta}$

   (d) $r = \dfrac{3}{2 + 4\cos\theta}$

   (e) $r = \dfrac{4}{2 - 3\cos\theta}$

4. Determine a equação cartesiana de cada uma das seguintes equações e identifique-as:

   (a) $r\cos(\theta - \pi/6) = \sqrt{3}$

   (b) $r\cos(\theta - 2\pi/3) = 4$

   (c) $r = \dfrac{5}{2 - 2\cos\theta}$

   (d) $r = \dfrac{6}{3 + \sin\theta}$

   (e) $r = \dfrac{3}{2 + 4\cos\theta}$

5. Determine as equações polares das seguintes equações:

   (a) $(x - 6)^2 + y^2 = 36$

   (b) $x^2 + (y - 5)^2 = 25$

   (c) $x^2 + 2x + y^2 = 0$

   (d) $2x^2 + 2y^2 + 2x - 6y + 3 = 0$

   (e) $x^2 + y^2 = 4$

   (f) $x^2 + y^2 + 2x = 0$

3.5 Coordenadas Cilíndricas e Esféricas

Em determinados problemas do espaço tridimensional tornam-se mais fáceis se introduzimos um sistema de coordenadas não cartesianas. Dois mais importantes são o sistema cilíndrico e o esférico.

O sistema de **coordenadas cilíndrica** é muito semelhante ao sistema de coordenadas cartesianas, exceto que usamos coordenadas polares para um ponto no plano horizontal e a cota z é a própria distância ao plano xy. Assim, as coordenadas cilíndricas de um ponto são (r,θ,z), onde r e θ são coordenadas polares para a projeção vertical de P sobre o plano xy. As equações relacionando coordenadas cartesianas e cilíndricas são:

$$x = rcos(\theta)$$

$$y = rsen(\theta)$$

$$z = z$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

Em coordenadas cilíndricas, a equação $r = a$ descreve um cilindro inteiro em relação ao eixo z. A equação $\theta = \theta_0$ descreve o plano que contém o eixo z e forma uma ângulo θ_0 com o eixo x positivo. E $z = z_0$ descreve um plano perpendicular ao eixo z. O cilindro e o plano são apresentados na Figura 3.13.

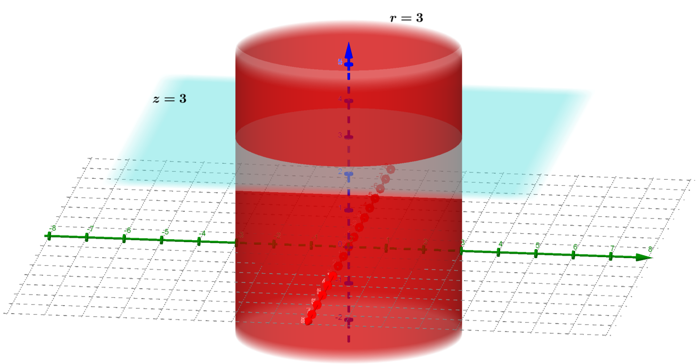


Figura 3.13: Cilindro interseção com plano paralelo ao plano xy.

Exemplo 48. *Escreva as coordenadas cartesianas do ponto* $(5, -\dfrac{\pi}{3},3)$.

Solução:

$$x = 5cos(-\frac{\pi}{3}) = \frac{5}{2}$$

$$y = 5sen(-\frac{\pi}{3}) = (-\frac{5\sqrt{3}}{2})$$
$$z = 3.$$

Coordenadas cilíndricas são úteis para descrever cilindros cujos eixos coincidem com o eixo z e planos que contém o eixo z ou são perpendiculares a ele.

No sistema de **coordenadas esféricas**, o ângulo θ representa exatamente o mesmo ângulo do sistema de coordenadas cilíndrica. Então, θ localiza um ponto P em um plano contendo o eixo z e fazendo um ângulo θ com o eixo positivo x. A distância entre P e a origem O é representada pela letra grega ρ (lê-se:rô): $\rho = |\overline{OP}|$. Finalmente, o ângulo de eixo positivo z ao segmento de reta $\overline{OP}$ é representado pela letra grega ϕ (lê-se: fi). As coordenadas esféricas de um ponto P são (ρ,θ,ϕ) e são geralmente escolhidas de modo que $\rho \geq 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq \phi \leq \pi$. Observe a Figura 3.14.

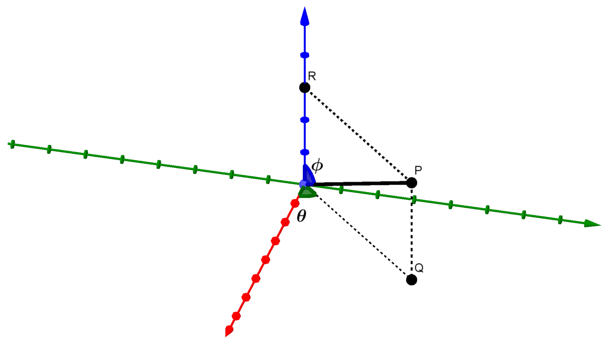


Figura 3.14: Coordenadas esféricas.

Pela figura 3.14, observamos que $sen\phi = \frac{|\overline{OQ}|}{|\overline{OP}|} = \frac{r}{\rho}$, logo $r = \rho sen\phi$. Pelas equações $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$, temos

$$x = \rho sen(\phi)cos(\theta)$$
$$y = \rho sen(\phi)sen(\theta)$$

Do triângulo ORP, sabe-se que ele é retângulo, então $cos\phi = \frac{|\overline{OR}|}{|\overline{OP}|} = \frac{z}{\rho}$. Portanto,

$$z = \rho cos(\phi).$$

Como ρ é a distância entre P e a origem, então: $\rho^2 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Se $x \neq 0$, $\frac{y}{x} = \frac{sen(\theta)}{cos(\theta)} = tan(\theta)$. Se $\rho \neq 0$, então $\frac{z}{\rho} = cos(\phi)$. Portanto, se escolhermos as coordenadas esféricas (ρ,θ,ϕ), de modo que $\rho \geq 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq \phi \leq \pi$, temos $\rho^2 = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $tan(\theta) = \dfrac{y}{x}$, para $x \neq 0$. E, $\phi = cos^{-1} = \dfrac{z}{\rho}$.

Exemplo 49. *Converta o ponto* $(3,0,\pi)$ *para coordenadas cartesianas*

Solução:
Pelas equações:

$$x = \rho sen(\phi)cos(\theta)$$
$$y = \rho sen(\phi)sen(\theta)$$
$$z = \rho cos(\phi).$$

Temos:

$$x = 3sen(\pi)cos(0) = 0$$
$$y = 3sen(\pi)sen(0) = 0$$
$$z = 3cos(\pi) = -3$$

Portanto, o ponto em coordenadas cartesianas é $(0,0,-3)$.

A equação $\rho = a$ descreve uma esfera de raio a, centrada na origem. A equação $\phi = \phi_0$ descreve um cone cujo vértice está na origem e seu eixo é o eixo z.

3.6 Lista de exercícios: Coordenadas Polares, Cilíndricas e Esféricas

Coordenadas Polares

1. Encontre as coordenadas cartesianas retangulares de cada um dos seguintes pontos cujas coordenadas polares são dadas:
   (a) $(3,\pi)$
   (b) $(\sqrt{2},\frac{3\pi}{4})$
   (c) $(-4,\frac{2\pi}{3})$
   (d) $(-2,-\frac{\pi}{2})$
   (e) $(-2,\frac{7\pi}{4})$
2. Quais pares de coordenadas polares representam o mesmo ponto?
   (a) $(4,0)$

(b) $(-3{,}0)$

(c) $(2{,}\frac{2\pi}{3})$

(d) $(2{,}\frac{7\pi}{3})$

(e) $(-4{,}\pi)$

(f) $(2{,}\frac{\pi}{3})$

(g) $(-3{,}2\pi)$

(h) $(-2{,}-\frac{\pi}{3})$

3. Determine uma das coordenadas polares dos pontos abaixo, dados em coordenadas cartesianas:

(a) $(0{,}-4)$

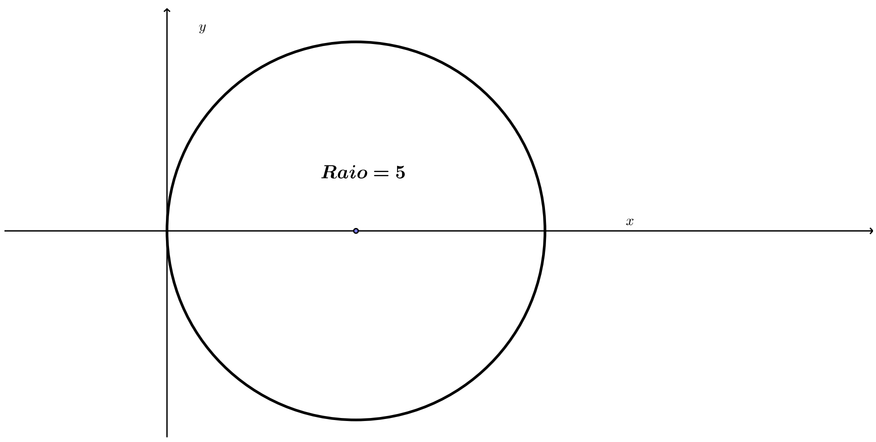
(b) $(1{,}1)$

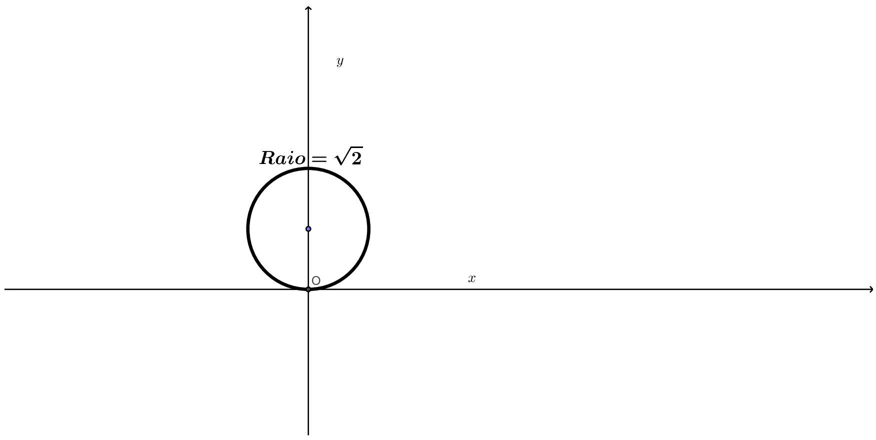
(c) $(0{,}3)$

(d) $(-2{,}2\sqrt{3})$

4. Determine as equações dos círculos:

(a)



(b) 

5. Esboce os círculos, indique as coordenadas de seus centros e identifique seus raios:

   (a) $r = 6\cos\theta$

   (b) $r = 4sen\theta$

   (c) $r = -8\cos\theta$

   (d) $r = -2sen\theta$

Coordenadas Cilíndricas e Coordenadas Esféricas

1. Converta de coordenadas cilíndricas para cartesianas:

   (a) $(4,\frac{\pi}{3},1)$

   (b) $(3,\frac{\pi}{2},4)$

   (c) $(5,\frac{\pi}{6},-2)$

   (d) $(6,\frac{2\pi}{3},-1)$

2. Converta as equações em uma equação equivalente em coordenadas cilíndricas:

   (a) $z = 2(x^2 + y^2)$

   (b) $x^2 + y^2 = 25$

3. Converta de coordenadas esféricas para cartesianas:

   (a) $(1,0,0)$

   (b) $(1,\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6})$

   (c) $(5,\pi,\frac{\pi}{2})$

(d) $(2,\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4})$

4. Converta as equações em uma equação equivalente em coordenadas esféricas:

   (a) $z^2 = x^2 + y^2$
   (b) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$

3.7 Gabaritos

Lista Cônicas
Parábola

1. a) $F(0,3), y = -3, x = t, y = \frac{t^2}{12}$; b)$F(-2,0), x = 2, y = t, x = -\frac{t^2}{8}$; c)$F(1,0), x = -1$; d) $F(0,1), y = -1$, $x = t, y = \frac{t^2}{4}$; e) $F(\frac{5}{4},0), x = -\frac{5}{4}, y = t, x = \frac{t^2}{5}$
2. a) $y^2 = 20x$; b) $x^2 + 8y = 0$; c) $y^2 - 2x = 0$; d) $x^2 - 8y = 0$; e) $y^2 - 8x = 0$; f) $x^2 = -12y$
3. $x^2 = -y$
4. a) $y^2 - 6x = 0$; b) $x^2 = -9y$

Elipse

1. a) focos: $(-4,0), (4,0)$, vértices: $(5,0), (-5,0), (0,3)(0,-3)$, excentricidade: $e = \frac{4}{5}$, equações paramétricas: $x = 5cos\theta, y = 3sen\theta$; b) focos: $(\sqrt{7},0), (-\sqrt{7},0)$, vértices: $(4,0), (-4,0), (0,3)(0,-3)$, excentricidade: $e = \frac{\sqrt{7}}{4}$, equações paramétricas: $x = 4cos\theta, y = 3sen\theta$; c) focos: $(0,\sqrt{12}), (0,-\sqrt{12})$, vértices: $(0,4), (0,-4), (-2,0)(2,0)$, excentricidade: $e = \frac{\sqrt{12}}{4}$, equações paramétricas: $x = 2cos\theta, y = 4sen\theta$;
2. a) $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{13} = 1$; b) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$; c) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$
3. a) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$; b) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$;
4. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$;

Circunferência

1. a) $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 25$; b) $(x+5)^2 + (y+12)^2 = 9$; c) $x^2 + y^2 = 16$
2. $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 13$
3. a) $C(3,4), r = 4$; b) $C(0,-\frac{2}{3})$; c) $C(2,3)$

4. $(x-3)^2+(y-4)^2=17$

5. $(x+1)^2+(y+5)^2=26$

6. a única equação que representa uma circunferência é a letra e).

7. $s\cap c:\{(1{,}1),(-1,-1)\}$

8. $s\cap c:\{(1,-1)\}$

9. $s\cap c:\{\emptyset\}$

10. $b=7$ ou $b=-1$

Hipérbole

1. a) focos: $(\sqrt{13}{,}0),(-\sqrt{13}{,}0)$, vértices: $(2{,}0),(-2{,}0)$, excentricidade: $e=\frac{\sqrt{13}}{2}$, equações paramétricas: $x=2sec\theta, y=3tan\theta$; b) focos: $(0,\sqrt{34}),(0,-\sqrt{34})$, vértices: $(0{,}3),(0,-3)$, excentricidade: $e=\frac{\sqrt{34}}{3}$, equações paramétricas: $x=5tan\theta, y=3sec\theta$; c) focos: $(\sqrt{34}{,}0),(-\sqrt{34}{,}0)$, vértices: $(5{,}0),(-5{,}0)$

2. a) $9x^2-16y^2=-144$; b) $-3x^2+y^2=-3$; c) $9x^2-16y^2=144$; d) $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{16}=1$; d)$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

Equações Paramétricas

1. a) $y=t, x=-\frac{t^2}{2}$; b) $x=\sqrt{5}cos\theta, y=3sen\theta$; c) $x=\sqrt{5}sec\theta$, $y=2tan\theta$

Translação de eixos:

1. $y^2=-16x-2y+47$

2. $y^2=-8x+12y-40$

3. $y^2+8x-4y=20$

4. $(y+3)^2=-8(x-4)$

5. a) $V(-7{,}3), F(-\frac{23}{4}{,}3), x=-\frac{33}{4}$; b) $V(2,-1), F(2,-2), y=0$; c)$V(-1,-4), F(-5,-1), x=-3$; d) $V(-1,-4), F(-1,-5), y=-3$

6. a) $(y+1)^2=12(x+1)$; b) $(x+1)^2=-4(y-1)$; c) $(x-1)^2=20(y+2)$; d)$(x-1)^2=-12(y-3)$; e) $(x-2)^2=-\frac{1}{2}y$; f) $(y+4)^2=12(x-2)$; g) $(y+2)^2=\frac{5}{2}(x+3)$

7. $y=-\frac{1}{4}x^2+x-2$

8. -

9. -
10. $\frac{(x+1)^2}{16}+\frac{(y+2)^2}{25}=1$
11. $\frac{(x-2)^2}{7}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$
12. focos: $(3,-4)$ e $(3{,}12)$
13. a) $\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{4}=1$; b) $\frac{(x+2)^2}{1}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$; c) $\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y+3)^2}{9}=1$; d) $\frac{(x+3)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$; e)$\frac{(x-2)^2}{36}+\frac{(y-1)^2}{20}=1$; f) $\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y+4)^2}{16}=1$
14. $\frac{(y+1)^2}{16}-\frac{(x-2)^2}{9}=1$
15. $\frac{(y+3)^2}{16}-\frac{(x-1)^2}{9}=1$
16. -
17. a) $\frac{(y-3)^2}{64}-\frac{(x+5)^2}{36}=1$; b) $\frac{(x-2)^2}{36}-\frac{(y+1)^2}{25}=1$; c) $\frac{(x+3)^2}{16}-\frac{(y-1)^2}{9}=1$; d) $\frac{(y+3)^2}{9}-\frac{(x-2)^2}{16}=1$; e) $\frac{(x-1)^2}{16}-\frac{(y-2)^2}{9}=1$; f) $\frac{(x-2)^2}{8}-\frac{(y+3)^2}{5}=1$
18. Parábolas: (a), (c), (i). Elipse: (b), (d). Circunferência: (g), (h). Hipérbole: (e), (f), (j).
19. a) $V(-2,-3), F(-1,-3)$; b) $V(1,-7), F(1,-5)$; c) $C(-2,-1)\dfrac{(x+2)^2}{6}+\dfrac{(y+1)^2}{9}=1$; d) $C(2,3), F(3,3), F(1,3)$; e) $C(2,2), \dfrac{(x-2)^2}{4}-\dfrac{(y-2)^2}{5}=1$; f) $C(-1,-1), F(-1,-1+\sqrt{2}), F(-1,-1-\sqrt{2})$

Lista de Superfícies

Superfícies

1. Sequência das respostas: Elipsóide, Hiperbolóide de uma folha, Hiperbolóide de duas folhas, Esfera, Parabolóide elíptico, Hiperbolóide de uma folha, Elipsóide, Esfera, Hiperbolóide de uma folha, Hiperbolóide de duas folhas, Hiperbolóide de uma folha, Parabolóide elíptico, Parabolóide elíptico, Parabolóide hiperbólico, Parabolóide elíptico.

Coordenadas Polares, Cilíndricas e Esféricas

Coordenadas Polares

1. a)$(-3{,}0)$; b) $(-1{,}1)$; c) $(2{,}2\sqrt{3})$; d) $(0{,}2)$; e) $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$
2. (a,e); (b,g); (c,h); (d,f)
3. a) $(-4,\dfrac{3\pi}{2})$; b) $(\sqrt{2},\dfrac{\pi}{4})$; c) $(3,\dfrac{\pi}{2})$; d) $(4,\dfrac{2\pi}{3})$

1. a) $r=10cos\theta$; b) $r=2\sqrt{2}cos\theta$

1. Gráficos

Coordenadas Esféricas

1. a) $(2{,}2\sqrt{3}{,}1)$; b) $(0{,}3{,}4)$; c) $(\frac{5\sqrt{3}}{2}{,}\frac{5}{2}{,}-2)$; d) $(-3{,}3\sqrt{3}{,}-1)$

2. a) $z = 2r^2$; b) $r = 5$

3. a) $(0{,}0{,}1)$; b) $(\frac{\sqrt{3}}{4}{,}\frac{1}{4}{,}\frac{\sqrt{3}}{2})$; c) $(-5{,}0{,}0)$; d) $(\frac{\sqrt{2}}{2}{,}\frac{\sqrt{6}}{2}{,}\sqrt{2})$

4. a) $\phi = \frac{\pi}{4}$; b) $\rho = 5$

Bibliografia

1. Steinbruch, A.; Winterle, P. *Geometria Analítica*, São Paulo: Pearson Makron Books, 1987.

2. Winterle, P. *Vetores e Geometria Analítica*, São Paulo: Makron Books, 2 ed., 2014.

3. Boulos, P. *Geometria Analítica: um tratamento vetorial*, São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

4. Weir, Maurice D. *Cálculo (George B. Thomas)*, Volume II, São Paulo: Addison Wesley, 2009.

5. Demana, F. D.; Waits, B. K.; Foley, G. D.; Kennedy, D. *Pré-Cálculo*, 2 ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2013.