BÁRBARA DENICOL DO AMARAL RODRIGUEZ
CINTHYA MARIA SCHNEIDER MENEGHETTI
CRISTIANA ANDRADE POFFAL

# DIFERENCIAIS E O CÁLCULO APROXIMADO

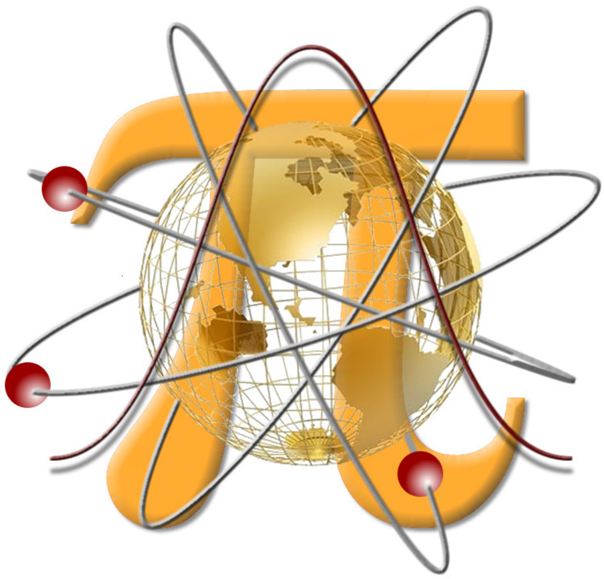
1ª Edição

Editora da furg

Rio Grande
2017

Universidade Federal do Rio Grande - FURG

# NOTAS DE AULA DE CÁLCULO




Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF

Bárbara Rodriguez

Cinthya Meneghetti

Cristiana Poffal

sites.google.com/site/calculofurg

# Sumário

# Capítulo 1

# Diferenciais e o Cálculo Aproximado

Diversos problemas nas áreas de Matemática, Química ou Engenharia estão preocupados com as inter-relações entre as mudanças nas propriedades físicas ou geométricas, decorrentes das variações em um ou mais parâmetros que definem o estado inicial de um sistema. Estas mudanças podem ser grandes ou pequenas. Particularmente, neste livro, serão abordadas as pequenas variações.

Durante o estudo das derivadas, $\dfrac{dy}{dx}$ foi interpretado como uma única entidade representando a derivada de $y$ em relação a $x$. Neste livro são introduzidos significados diferentes para $dy$ e $dx$, o que permitirá tratar $\dfrac{dy}{dx}$ como uma razão.

Também será discutido como as derivadas podem ser usadas para aproximar funções complicadas por funções lineares mais simples. Tais funções são denominadas linearizações e se baseiam em retas tangentes.

## 1.1 Acréscimos

Seja $y = f(x)$ uma função. Define-se o acréscimo de $x$, denotado por $\Delta x$, como:

$$\Delta x = x_2 - x_1,$$

onde $x_1, x_2 \in D(f)$.

A variação de $x$ origina uma correspondente variação de $y$, denotada por $\Delta y$, dada por:

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1),$$

ou

$$\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1).$$

Na Figura 1.1, pode-se observar graficamente o significado de $\Delta x$ e $\Delta y$.

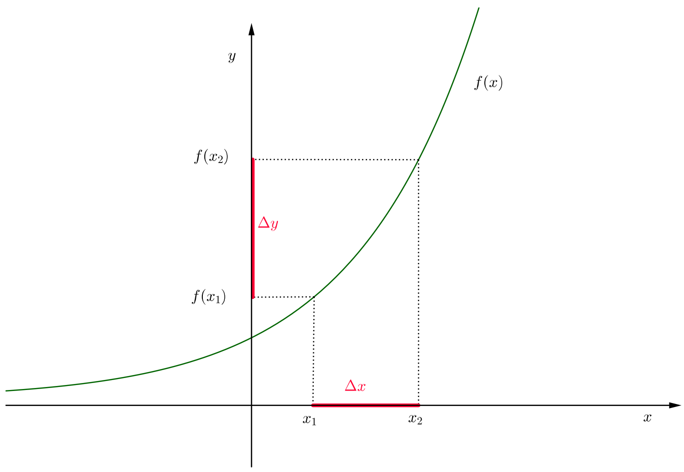



Figura 1.1: Representação gráfica dos incrementos $\Delta x$ e $\Delta y$.

## 1.2 Diferencial

**Definição 1.2.1.** Diferencial de uma função é o acréscimo sofrido pela ordenada da reta tangente correspondente a um acréscimo $\Delta x$ sofrido por $x$.

**Definição 1.2.2.** Sejam $y = f(x)$ uma função derivável e $\Delta x$ um acréscimo de $x$. Define-se:

a) a diferencial da variável independente $x$, denotada por $dx$, como $\Delta x = dx$.

b) a diferencial da variável dependente $y$, denotada por $dy$, como $dy = f'(x) \cdot \Delta x$.

De acordo com a Definição 1.2.2, é possível escrever $dy = f'(x) \cdot dx$ ou $\dfrac{dy}{dx} = f'(x)$.

A notação $\dfrac{dy}{dx}$, já usada para $f'(x)$, pode agora ser considerada um quociente entre duas diferenciais.

**Observação 1.2.1.** Quando Newton e Leibniz publicaram independentemente seus estudos relacionados ao Cálculo, cada um usou uma notação para a derivada. Neste curso, adotam-se as notações linha (de Lagrange), $y'$, e de operador diferencial (de Leibniz), $\dfrac{dy}{dx}$. A notação do ponto, desenvolvida por Newton, não será explorada neste material.

**Exemplo 1.2.1.** Se $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$, determine $dy$.

*Solução:*

Tem-se que $dy = f'(x)dx$. Para $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$, aplicando as regras de derivada da subtração, derivada da potência de $x$ e da derivada de uma constante, $f'(x) = 6x - 2$. Logo, $dy = (6x - 2)dx$.

**Exemplo 1.2.2.** Calcular a diferencial das funções:

a) $y = \sqrt{1 + x^2}$

b) $y = \dfrac{1}{3}\text{tg}^3(x) + \text{tg}(x)$.

*Solução:*

a) Como $dy = f'(x)dx$ e $y = f(x) = \sqrt{1 + x^2}$, tem-se, aplicando a regra da cadeia: $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$. Logo, $dy = f'(x)dx = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}dx$.

b) Aplicando as regras de derivada da potência, da cadeia e da derivada da tangente, tem-se:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3} \cdot 3\text{tg}^2(x) \cdot \sec^2(x) + \sec^2(x) \\ &= \sec^2(x)[\text{tg}^2(x) + 1] \\ f'(x) &= \sec^4(x). \end{aligned}$$

Portanto, $dy = \sec^4(x)dx$.

## 1.3 Interpretação Geométrica

Seja $y = f(x)$ uma função derivável, cujo gráfico é ilustrado na Figura 1.3.

Considere os pontos $P(x_1, f(x_1))$, $M(x_2, f(x_1))$ e $Q(x_2, f(x_2))$. O acréscimo $\Delta x$ que define a diferencial $dx$ está geometricamente representado pela medida do segmento $\overline{PM}$.

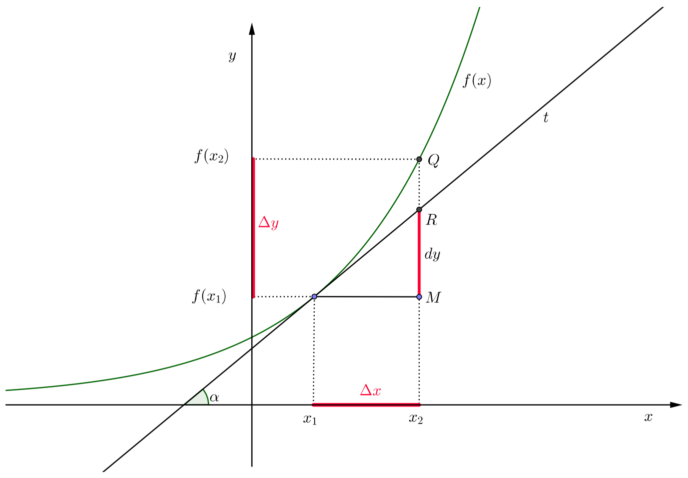



Figura 1.2: Interpretação geométrica da diferencial.

O acréscimo $\Delta y$ está representado pela medida do segmento $\overline{MQ}$.

Seja $t$ a reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $P$. Esta reta corta a reta vertical $x = x_2$ no ponto $R$, formando o triângulo retângulo $PMR$. A inclinação (coeficiente angular) desta reta é dada por $f'(x_1) = \text{tg}(\alpha)$.

Observando o triângulo $PMR$, é possível escrever:

$$f'(x_1) = \text{tg}(\alpha) = \frac{\overline{MR}}{\overline{PM}}.$$

onde $\overline{MR}$ e $\overline{PM}$ são respectivamente as medidas dos segmentos $MR$ e $PM$. Usando o fato de que $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$ conclui-se que $dy = \overline{MR}$, já que $dx = \overline{PM}$.

Pela substituição de $\Delta y$ por $dy$ comete-se um erro que é calculado pelo módulo da diferença entre o valor exato da variação de $y$ $(\Delta y)$ e o valor aproximado da variação de $y$ $(dy)$, isto é,

$$e = |\Delta y - dy|.$$

O que acontece com $\Delta y - dy$ quando $\Delta x$ torna-se muito pequeno?

Observa-se que, quando $\Delta x$ torna-se muito pequeno, o mesmo ocorre com a diferença $\Delta y - dy$.

Em exemplos práticos, considera-se $\Delta y \approx dy$ (lê-se: $\Delta y$ aproximadamente igual a $dy$), desde que o $\Delta x$ considerado seja um valor pequeno.

Em outras palavras, para valores pequenos de $\Delta x$,

$$\Delta y \approx dy.$$

Sabendo-se que $dy = f'(x)\Delta x$, tem-se:

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x.$$

Pela Definição 1.2.2:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x),$$

logo,

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x,$$

ou ainda,

$$f(x + \Delta x) \approx f'(x)\Delta x + f(x). \tag{1.3.1}$$

A este processo chama-se de **linearização de $f$**, em torno de $x$.

**Exemplo 1.3.1.** Compare os valores de $\Delta y$ e $dy$ se $y = x^3 + x^2 - 2x + 1$ e $x$ variar (a) de 2 para $2,05$ e (b) de 2 para $2,01$.

*Solução:*

(a) Tem-se que $\Delta x = 0,05$, assim por definição:

$$\begin{aligned}
\Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) \\
&= f(2 + 0,05) - f(2) \\
&= [(2,05)^3 + (2,05)^2 - 2(2,05) + 1] - [2^3 + 2^2 - 2(2) + 1] \\
\Delta y &= 0,717625.
\end{aligned}$$

Para o cálculo de $dy$, quando $x = 2$ e $\Delta x = 0,05$ tem-se:

$$\begin{aligned}
dy &= f'(x)dx = (3x^2 + 2x - 2)dx \\
&= [3(2)^2 + 2(2) - 2]0,05 \\
dy &= 0,7.
\end{aligned}$$

Observe que o erro cometido ao usar diferenciais $e = |\Delta y - dy|$ é de 0,017625.

(b) Tem-se que $\Delta x = 0,01$, assim por definição:

$$\begin{aligned}
\Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) \\
&= f(2 + 0,01) - f(2) \\
&= [(2,01)^3 + (2,01)^2 - 2(2,01) + 1] - [2^3 + 2^2 - 2(2) + 1] \\
\Delta y &= 0,140701.
\end{aligned}$$

Para o cálculo de $dy$, quando $x = 2$ e $\Delta x = 0,01$ tem-se:

$$\begin{aligned} dy &= f'(x)dx = (3x^2 + 2x - 2)dx \\ &= [3(2)^2 + 2(2) - 2]0,01 \\ dy &= 0,14. \end{aligned}$$

**Observação 1.3.1.** Observe a função do **Exemplo 1.3.1**. Comparando $\Delta y$ com $dy$ percebe-se que a aproximação por diferenciais $dy$ torna-se melhor à medida que $\Delta x$ fica menor.

De fato, para o item (a), o erro cometido ao empregar diferenciais é $e = |\Delta y - dy| = |0,717625 - 0,7| = 0,017625$. Enquanto que para o item (b), onde $\Delta x$ é menor, o erro cometido ao empregar diferenciais é $e = |\Delta y - dy| = |0,140701 - 0,14| = 0,000701$.

**Observação 1.3.2.** Em alguns casos é mais fácil calcular o $dy$, pois para funções mais complicadas pode ser impossível calcular exatamente o valor de $\Delta y$. Nesses casos, a aproximação por diferenciais torna-se muito útil.

**Exemplo 1.3.2.** Se $y = 2x^2 - 6x + 5$, calcule o acréscimo $\Delta y$ para $x = 3$ e $\Delta x = 0,001$.

*Solução:*

Pela definição de $\Delta y$, escreve-se:

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) \\ &= f(3 + 0,001) - f(3) \\ &= [2(3,001)^2 - 6(3,001) + 5] - [2(3^2) - 6(3) + 5] \\ &= 5,006002 - 5 \\ \Delta y &= 0,006002. \end{aligned}$$

Portanto o acréscimo $\Delta y = 0,006002$.

**Exemplo 1.3.3.** Se $y = 6x^2 - 4$, calcule o acréscimo $\Delta y$ e $dy$ para $x = 2$ e $\Delta x = 0,001$.

*Solução:*

Utilizando a definição de $\Delta y$, tem-se

$$\begin{aligned}
\Delta y &= f(x_1+\Delta x)-f(x_1)\\
&= f(2+0,001)-f(2)\\
&= [6\cdot(2,001)^2-4]-[6(2^2)-4]\\
&= 20,024006-20\\
\Delta y &= 0,024006.
\end{aligned}$$

Portanto, $\Delta y = 0,024006$.

Pela definição de $dy$ e sabendo que $f(x)=6x^2-4$, tem-se:

$$\begin{aligned}
dy &= f'(x)dx\\
&= 12x\Delta x\\
&= 12(2)(0,001)\\
dy &= 0,024.
\end{aligned}$$

Logo, $dy = 0,024$.

Observa-se que a diferença $|\Delta y - dy| = 0,000006$ seria menor, caso fosse usado um valor menor que 0,001 para $\Delta x$.

**Exemplo 1.3.4.** Calcule um valor aproximado para $\sqrt[3]{65,5}$ usando diferenciais.

*Solução:*

Seja $y=f(x)$ a função definida por $f(x)=\sqrt[3]{x}$. Aplicando a linearização da função $f$, representada pela equação (1.3.1), escreve-se:

$$y+dy=\sqrt[3]{x+\Delta x}$$

e

$$dy=\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}dx.$$

Tem-se $x=64$ e $\Delta x=1,5$, pois 64 é o cubo perfeito mais próximo de 65,5.

Portanto,

$$\begin{aligned}
&x+\Delta x = 65,5\\
&dx=\Delta x = 1,5\\
&y=\sqrt[3]{64}=4
\end{aligned}$$

e

$$dy = \frac{1}{3(64)^{\frac{2}{3}}} \cdot 1,5 = \frac{1,5}{3 \cdot 16} = 0,03125.$$

Logo,

$$\sqrt[3]{65,5} = \sqrt[3]{64 + 1,5} \approx y + dy.$$

Finalmente,

$$\sqrt[3]{65,5} \approx y + dy = 4 + 0,03125 \approx 4,03125.$$

Observe que, ao utilizar uma calculadora, obtém-se que

$$\sqrt[3]{65,5} \approx 4,0310089894.$$

Portanto o erro cometido ao utilizar diferenciais é de 0,0002410106, ou seja, de 2,410106$\times 10^{-4}$.

**Exemplo 1.3.5.** Obtenha um valor aproximado para o volume de uma fina coroa cilíndrica de altura 12 m, raio interior 7 m e espessura 0,05 m. Determine o erro decorrente da utilização de diferenciais.

*Solução:*

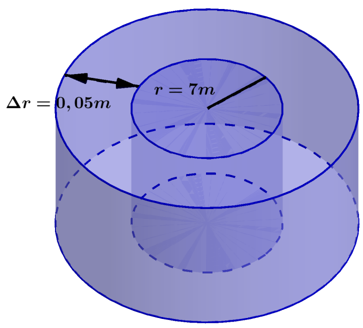



Figura 1.3: Coroa cilíndrica

A Figura 1.3 representa o sólido de altura $h$, raio interior $r$ e espessura $\Delta r$. O volume do cilindro interior é dado por:

$$V = \pi r^2 \cdot h = \pi (7)^2 \cdot 12 = 588\pi \text{ m}^3.$$

Havendo um acréscimo $\Delta r$, o volume da coroa será igual à variação $\Delta V$ em $V$. Usando diferenciais, tem-se:

$$\Delta V \approx dV$$

e

$$\begin{aligned} dV &= 2\pi r \cdot h \cdot \Delta r \\ dV &= 2\pi(7)(12)(0,05) = 8,4\pi \text{ m}^3. \end{aligned}$$

O volume exato da coroa cilíndrica é:

$$\begin{aligned} \Delta V &= \pi(r+\Delta r)^2 \cdot h - \pi r^2 \cdot h \\ &= \pi(7,05)^2 \cdot 12 - \pi \cdot (7^2) \cdot 12 \\ &= 596,43\pi - 588\pi \\ \Delta V &= 8,43\ \pi \text{m}^3. \end{aligned}$$

Portanto, o erro cometido na aproximação por diferenciais é $e = |\Delta V - dV| = 0,03\ \pi\text{m}^3$.

**Exemplo 1.3.6.** Uma placa quadrada de lado $x$, de espessura desprezível, é aquecida. O processo de aquecimento provoca uma dilatação na placa. Admitindo uma dilatação uniforme, mantendo a forma quadrada, calcule a variação da área em função da variação de seu lado, $\Delta x$, ocorrida devido ao processo de aquecimento. Estime a variação da área utilizando diferenciais. Interprete o resultado.

*Solução:* A placa quadrada inicialmente tem lado de medida $x$. Portanto, sua área vale $A(x) = x^2$.

Após o aquecimento, a medida do seu lado aumenta em $\Delta x$ unidades. Portanto, essa medida varia de $x$ para $x+\Delta x$ e a área da placa, após o aquecimento é,

$$A(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

A variação da área do quadrado quando a medida varia de $x$ para $x+\Delta x$ é,

$$\Delta A = A(x+\Delta x) - A(x) = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Por outro lado, em termos de diferenciais, a variação da área pode ser escrita como,

$$dA = A'(x)dx = 2xdx = 2x\Delta x.$$

Observe que o erro cometido ao utilizar diferenciais é $e = |\Delta A - dA| = (\Delta x)^2$, portanto quando o acréscimo $\Delta_x$ é muito pequeno, o valor do diferencial $dA$ pode ser dita como uma boa aproximação para a variação da área.

## 1.4 Aplicação de Diferenciais na Física - Período de um Pêndulo Simples

Uma importante aplicação de diferenciais pode ser encontrada na Física. Um físico ao analisar as consequências de uma equação, muitas vezes necessita realizar simplificações nas equações matemáticas que representam os fenômenos físicos. Em alguns casos, aplica-se uma aproximação chamada de aproximação linear.

Usualmente os problemas envolvendo um pêndulo simples são analisados como sendo um oscilador harmônico simples, os quais geram um modelo matemático para sistemas relacionados ao movimento de uma partícula exposta a uma força de atração com magnitude proporcional a distância desta partícula em relação à origem do sistema. Dessa forma o movimento de um pêndulo simples pode ser descrito por uma equação, chamada equação diferencial ordinária,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\text{sen}(\theta) = 0, \tag{1.4.1}$$

onde $g$ é a aceleração da gravidade e $l$ o comprimento do pêndulo. Para valores muito pequenos do ângulo $\theta$, utiliza-se a aproximação linear $\text{sen}(\theta) \approx \theta$ e reescreve-se a equação (1.4.1) como,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0.$$

Esta equação indica que, dentro da aproximação de ângulos pequenos, o movimento do pêndulo simples é harmônico simples, e o período de oscilação do pêndulo é calculado como,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Esse fato pode observado na Figura 1.4 onde se apresentam os gráficos de $x$ e $\text{sen}(x)$ nas proximidades da origem. Note que a função $\text{sen}(x)$ está muito próxima da função $x$ quando $x$ é suficientemente pequeno, ou seja, próximo de zero.

## 1.5 Aplicação de Diferenciais - Cálculo de Erros

Pode-se estimar o valor do **erro propagado** - erro que se comete quando se usa uma estimativa para o argumento da função.

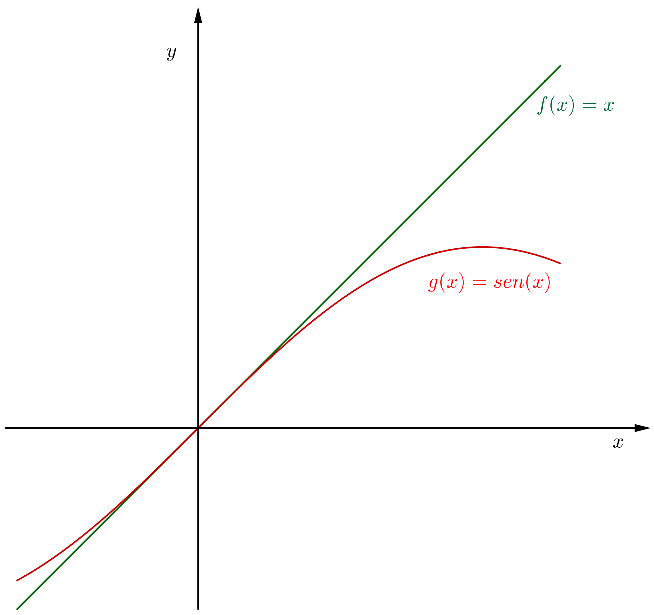



Figura 1.4: Gráficos da função seno e da função identidade

### 1.5.1 $E_{Max}$ - Erro Máximo

O $E_{Max} = dy$ é conhecido como erro máximo, erro propagado ou erro aproximado. Pode também ser dito valor aproximado. Note que $E_{Max}$ possui unidade de medida.

### 1.5.2 $E_{Rel}$ - Erro Relativo

O $E_{Rel} = \dfrac{dy}{y}$ é conhecido como erro relativo e não possui unidade de medida.

### 1.5.3 $E_{Pc}$ - Erro Percentual

O $E_{Pc} = 100\dfrac{dy}{y}$ é conhecido como erro percentual e é expresso como uma porcentagem.

**Exemplo 1.5.1.** Mediu-se o diâmetro de um círculo e se achou 5,2 polegadas, com um erro máximo de 0,05 polegadas. Determine o máximo erro aproximado da área quando calculada pela fórmula:

$$A = \frac{\pi D^2}{4}.$$

Determine também os erros relativos e percentual.

*Solução:*

O valor exato da área $A = \dfrac{\pi D^2}{4}$ para $D = 5,2$ polegadas é $A = 21,23$ pol$^2$ (polegadas$^2$).

A derivada de $A$ em relação a $D$ é

$$\frac{dA}{dD} = \frac{\pi}{2} D.$$

Assim, sua diferencial $dA$ é:

$$\begin{aligned} dA &= \frac{\pi}{4} \cdot 2D \cdot dD \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot 5,2 \cdot 0,05 \\ &= 0,41 \text{ pol}^2. \end{aligned}$$

O erro relativo é calculado por:

$$\frac{dA}{A} = 0,0193.$$

E o erro percentual é calculado por:

$$\begin{aligned} E_{Pc} &= 100 E_{Rel} \\ E_{Pc} &= 1,93\%. \end{aligned}$$

**Exemplo 1.5.2.** A medida do raio de uma esfera é $0,7$ cm. Se esta medida tiver uma margem de erro de $0,01$ cm, estime o erro propagado ao volume $V$ da esfera. Calcule o erro relativo.

*Solução:*

O volume da esfera é dado por

$$V = \frac{4\pi}{3} R^3.$$

A estimativa do raio da esfera é $R = 0,7$ e o erro máximo da estimativa é $\Delta R = dR = 0,01$.

A diferencial do volume da esfera é $dV = 4\pi R^2 dR$. Neste exemplo, $dV = 4\pi(0,7)^2(0,01) \approx 0,06158$ cm$^3$.

O erro relativo é dado por:

$$\frac{dV}{V} = \frac{4\pi R^2 dR}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3dR}{R} = \frac{3}{0,7}(0,01) \approx 0,04285714.$$

Portanto, o erro percentual é de aproximadamente $4,286\%$.

**Exercício 1.5.1.** Determine aproximadamente o volume de uma concha esférica cujo raio interior é 4 cm e cuja espessura é $1/16$ cm.

*Solução:*

Sabendo que o volume é dado por $V = \frac{4\pi}{3}R^3$ e $dR = \frac{1}{16}$, o cálculo aproximado do volume da concha será:

$$dV = \frac{4\pi}{3} \cdot R^2 dR = \frac{4\pi}{3} \cdot 3(4)^2 \frac{1}{16} = 4\pi \text{ cm}^3.$$

**Observação 1.5.1.** Considerando $y = f(x)$, para uma variação $\Delta x$, tem-se:

a) $\Delta y = \Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$ é o valor exato da variação de $f$.

b) $f(x) + dy = f(x) + f'(x)\Delta x$ é um valor aproximado de $f(x + \Delta x)$.

c) $dy = f'(x)\Delta x$ é um valor aproximado da variação de $f$.

## 1.6 Lista de Exercícios

1. Calcule o diferencial $dy$ das funções:

   a) $y = 6x^3 + 8x + 1$

   b) $y = \ln(x^3 + 4)$

   c) $y = e^{\sqrt{x^2+4}}$

   d) $y = \operatorname{sen}(4x)$

   e) $y = (1 - 2x)^3$

   f) $y = \dfrac{1}{x^2 - 2}$

   g) $y = \sqrt{1 - x^2}$

   h) $y = e^{4x}$

   i) $y = x^2 e^x$

   j) $xy + x - 2y = 5$.

2. Mostre que se $x^2 + y^2 = a^2$, então $dy = -\dfrac{x}{y}dx$.

3. Prove que a diferencial da função $y = \ln[\operatorname{sen}^2(x)]$ é $dy = 2\operatorname{cotg}(x)dx$.

4. Determine a diferencial da função $f(x) = \ln(1 - x^2)$.

5. Considere a função $y = 4x^2 - 3x + 1$, determine $\Delta y$ e $dy$ para:

   a) $x = 2$ e $\Delta x = dx = 0,1$

   b) $x = 2$ e $\Delta x = dx = 0,01$

   c) $x = 2$ e $\Delta x = dx = 0,001$.

6. Determine o erro cometido, $e = |\Delta y - dy|$, na aproximação por diferenciais da função $y = \dfrac{1}{x^2}$, quando $x = 2$ e $\Delta x = 0,01$.

7. Calcule o valor aproximado usando diferencial para:

   a) $\sqrt[3]{28}$

   b) $\ln(0,92)$

   c) $\operatorname{sen}(61°)$.

8. O raio de uma esfera metálica cresceu de 8,0 cm para 8,1 cm com aquecimento. Utilize diferencial para calcular o acréscimo aproximado do volume.

9. Um objeto de madeira com a forma de um cilindro de 3 cm de diâmetro e de 30 cm de altura é posto na lixadeira e seu diâmetro, reduzido a 2,95 cm. Utilize diferencial para estimar o volume do material resultante após ser posto na lixadeira. Qual o erro cometido nesse cálculo?



IMEF - FURG - IMEF - FURG - IMEF - FURG - IMEF - FURG - IMEF - FURG - IMEF - FURG - IMEF - FURG - IMEF - FURG - IMEF - FURG - IMEF - FURG - IM

10. Utilize diferenciais para estimar o volume aproximado de uma camada cilíndrica circular de 6 cm de altura cujo raio interno mede 2 cm e cuja espessura é de 0,1 cm.

11. Seja uma placa circular de raio $r$, de espessura desprezível, que é resfriada e se contrai de maneira uniforme, mantendo sua forma circular. Calcule a variação da área da placa em função da variação de seu raio, $\Delta r$, ocorrida devido ao processo de resfriamento. Estime a variação da área utilizando diferenciais. Interprete o resultado.

**Respostas da Lista**

1. a) $dy = (18x^2 + 8)dx$

   b) $dy = \dfrac{3x^2}{x^3+4}dx$

   c) $dy = \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}\right) e^{\sqrt{x^2+4}}dx$

   d) $dy = 4\cos(4x)dx$

   e) $dy = -6(1-2x)^2dx$

   f) $dy = \dfrac{-2x}{(x^2-2)^2}dx$

   g) $dy = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

   h) $dy = 4e^{4x}dx$

   i) $dy = e^x(2x + x^2)dx$

   j) Usando diferenciação implícita $dy = -\dfrac{(y+1)}{x-2}dx$. Escrevendo $y$ como uma função de $x$, obtém-se $dy = -\dfrac{3}{(x-2)^2}dx$.

2. Exercício de demonstração.

3. Exercício de demonstração.

4. $dy = -\dfrac{2x}{1-x^2}dx$

5. a) $\Delta y = 1,34$, $dy = 1,3$

   b) $\Delta y = 0,1304$, $dy = 0,13$

   c) $\Delta y = 0,013004$, $dy = 0,013$

6. $e = |\Delta y - dy| = 0,00001863$

7. a) $3,037$

   b) $-0,08$

   c) $0,8747$

8. $dV = 25,6\pi$ cm$^3$

9. $dV = -2,25\pi$ cm$^3$, $e = |\Delta V - dV| = 0,01875\pi$ cm$^3$

10. $dV = 2,4\pi$ cm$^3$

11. $\Delta A = -\pi(2r\Delta r + \Delta r^2), \Delta r < 0$ e $dA = 2\pi r dr = 2\pi r \Delta r, \Delta r < 0$.