

BÁRBARA DENICOL DO AMARAL RODRIGUEZ
CINTHYA MARIA SCHNEIDER MENEGHETTI
CRISTIANA ANDRADE POFFAL

LIMITES DE FUNÇÕES REAIS DE UMA
VARIÁVEL

1ª Edição

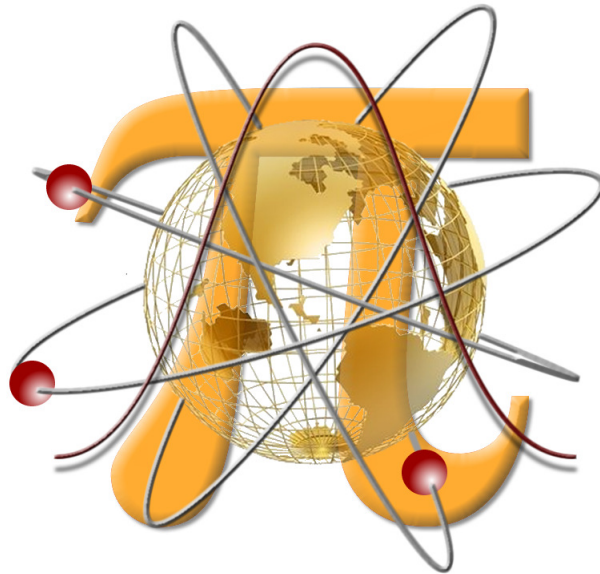


Rio Grande
Editora da FURG
2016



Universidade Federal do Rio Grande - FURG

NOTAS DE AULA DE CÁLCULO



Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF

Bárbara Rodriguez

Cinthya Meneghetti

Cristiana Poffal

sites.google.com/site/calculofurg

1.9.1	Indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$	46
1.9.2	Indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$	51
1.9.3	Indeterminação do tipo $\infty - \infty$	54
1.9.4	Indeterminação tipo $0 \cdot \infty$	55
1.10	Teorema do confronto	57
1.11	Limite de funções transcendentess	58
1.11.1	Função seno	58
1.11.2	Função cosseno	59
1.11.3	Função tangente	60
1.11.4	Função exponencial	61
1.11.5	Função logarítmica	67
1.12	Limites fundamentais	68
1.12.1	Limite fundamental trigonométrico	68
1.12.2	Limite fundamental exponencial I	71
1.12.3	Limite fundamental exponencial II	75
1.13	Lista de Exercícios	78

1.1 Definições importantes

- a) **Vizinhança:** Chama-se vizinhança (ou entorno) de centro em a e raio δ o intervalo aberto $(a - \delta, a + \delta)$, onde $\delta > 0$.

$$\text{Notação: } V(a, \delta) = (a - \delta, a + \delta) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \delta\}.$$

Veja a representação gráfica na Figura 1.1 (a).

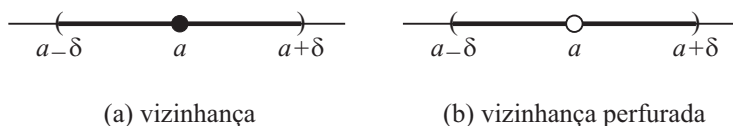


Figura 1.1: Representação gráfica de vizinhança e vizinhança perfurada.

- b) **Vizinhança perfurada:** É o intervalo $(a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$. Ou seja, é um entorno de raio δ onde o centro a não está incluído.

$$\text{Notação: } V_p(a, \delta) = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$$

$$V_p(a, \delta) = \{x \in \mathbb{R} \mid a - \delta < x < a + \delta \wedge x \neq a\}.$$

A representação gráfica pode ser vista na Figura 1.1 (b).

- c) **Ponto de acumulação ou ponto limite:** Um número a é dito ponto de acumulação de um conjunto C se, e somente se, para toda vizinhança perfurada $V_p(a, \delta)$ de centro a , existe pelo menos um ponto $x \neq a$ tal que $x \in C$ e $x \in V_p(a, \delta)$.

Exemplo 1.1.1. Se $C = \mathbb{R}$, então todo elemento de C é ponto de acumulação, pois toda vizinhança de qualquer elemento de C contém uma infinidade de elementos de C .

Exercício 1.1.1. Seja A o intervalo $[1, 4)$. Determine os pontos de acumulação de A .

- d) **Ponto isolado:** Um ponto a pertencente a C é ponto isolado de C se existe $V_p(a, \delta)$ tal que $\forall x \in C, x \neq a$ então $x \notin V_p(a, \delta)$.

Exemplo 1.1.2. Represente a vizinhança $|x - 5| < \frac{1}{2}$.

Solução:

Comparando com a definição de Vizinhança, tem-se que o centro é $a = 5$ e o raio é $\delta = \frac{1}{2}$. Para comprovar, utiliza-se a definição de módulo para encontrar o intervalo que representa a vizinhança:

$$|x - 5| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x - 5 < \frac{1}{2}.$$

Assim, tem-se:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} < x - 5 < \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} + 5 < x - 5 + 5 < \frac{1}{2} + 5 \\ \frac{9}{2} < x < \frac{11}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, a vizinhança é representada por $V(5, \frac{1}{2}) = (\frac{9}{2}, \frac{11}{2})$. A representação gráfica pode ser vista na Figura 1.2.



Figura 1.2: Representação da vizinhança $V(5, \frac{1}{2})$.

1.2 Motivação para a definição de limite

A idéia de limite aparece intuitivamente em muitas situações. Na Física, por exemplo, para definir a velocidade instantânea de um móvel utiliza-se o cálculo da velocidade média para o caso onde o intervalo de tempo seja muito próximo de zero. A velocidade média v_m é calculada como $v_m = \frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, onde s é a posição e t é o tempo (veja na Figura 1.3). Então, a velocidade instantânea v_i é definida como:

$$v_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

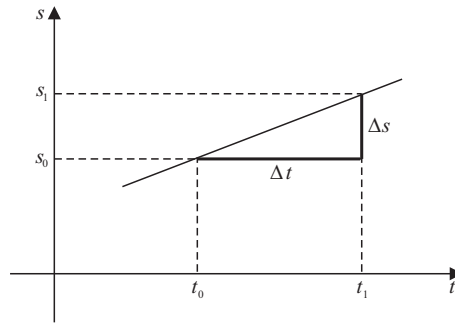


Figura 1.3: Gráfico da posição de um móvel ao longo do tempo.

Em outras palavras, a velocidade instantânea é o limite da velocidade média quando Δt tende a zero.

O estudo de limites serve para descrever como uma função se comporta quando a variável independente tende a um dado valor.

Notação: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

Lê-se: “ L é o limite de $f(x)$ quando x se aproxima de a ”.

O matemático francês Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) foi a primeira pessoa a atribuir um significado matematicamente rigoroso às frases “ $f(x)$ se aproxima arbitrariamente de L ” e “ x se aproxima de a ”.

Observação 1.2.1. A expressão $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ descreve o comportamento de $f(x)$ quando x está muito próximo de a , e não quando $x = a$.

Exemplo 1.2.1. Como será o comportamento da função $f(x) = x^2 - x + 1$ quando x se aproximar cada vez mais de 2?

Solução:

A determinação do comportamento de $f(x)$ para valores próximos de 2 pode ser analisada de várias formas. Inicialmente, atribuem-se valores que se aproximam de 2 para x e, calculando $f(x)$ para cada um desses valores, pode-se construir a Tabela 1:

Tabela 1: Valores da função $f(x)$ para valores próximos de 2.

x	1	1,5	1,9	1,99	1,999	2	2,001	2,01	2,1	2,5	3
$f(x)$	1	1,75	2,71	2,9701	2,997001	-	3,003001	3,0301	3,31	4,75	7
aproximação à esquerda \rightarrow							\leftarrow aproximação à direita				

Primeiramente, observe que não foi colocado na Tabela 1 o valor de $f(x)$ quando $x = 2$. Esse valor foi omitido, pois se deseja estudar apenas os valores de $f(x)$ quando x está próximo de 2, e não o valor da função quando $x = 2$.

Percebe-se que quando x se aproxima de 2 (em qualquer sentido) $f(x)$ se aproxima de 3. Logo, pode-se dizer que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$.

Observe a Figura 1.4. Comprova-se que o gráfico da função se aproxima para o mesmo valor quando x está se aproximando de 2, tanto para valores maiores quanto para valores menores do que 2.

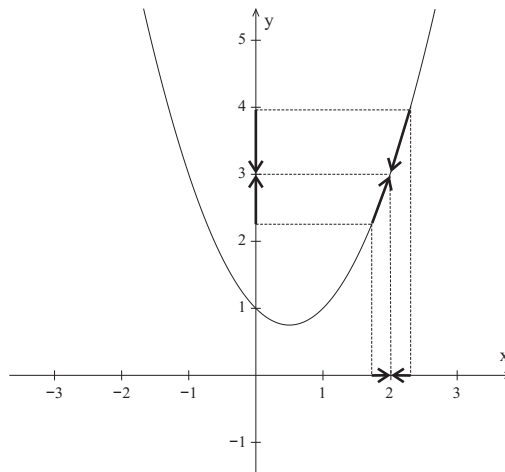


Figura 1.4: Gráfico de $f(x)$.

Nesse caso, o valor do limite coincidiu com o valor da função quando $x = 2$, pois $f(2) = 3$. Mas nem sempre esse comportamento vai se verificar, como pode ser visto no próximo exemplo.

Exemplo 1.2.2. Como será o comportamento da função $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & \text{se } x \neq 3 \\ 3, & \text{se } x = 3 \end{cases}$ quando x está cada vez mais próximo de 3?

Solução:

Assim como no exemplo anterior, primeiramente atribuem-se valores para x e, encontrando os valores de $f(x)$ correspondentes, pode-se construir a Tabela 2:

Tabela 2: Valores da função $f(x)$ para valores próximos de 3.

x	2	2,5	2,9	2,99	2,999	3	3,001	3,01	3,1	3,5	4
$f(x)$	3	4	4,8	4,98	4,998	-	5,002	5,02	5,2	6	7
	aproximação à esquerda →						← aproximação à direita				

Percebe-se que quando x se aproxima de 3 em ambos os sentidos, $f(x)$ se aproxima cada vez mais de 5. Logo, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 5$. Esse comportamento pode ser observado na Figura 1.5.

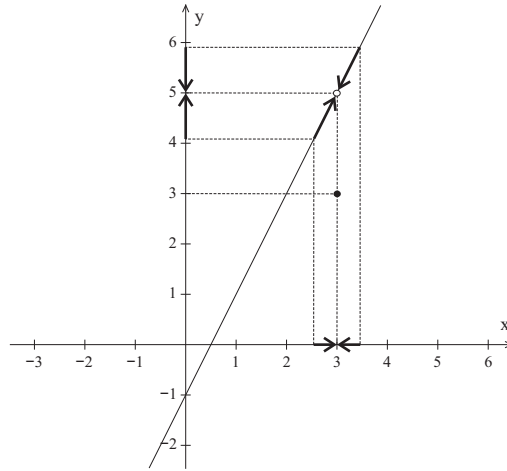


Figura 1.5: Gráfico de $f(x)$.

Observe que nesse caso, o valor de $f(x)$ quando $x = 3$ é $f(3) = 3$, justamente o ponto que se encontra fora da curva descrita por $f(x)$. Ou seja, $f(3) \neq \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$. Por isso, enfatiza-se o fato de que o limite descreve o comportamento da função à medida em que x se aproxima de 3, e não no próprio $x = 3$.

Exemplo 1.2.3. Como será o comportamento da função $f(x) = \begin{cases} 2, & \text{se } x \geq 0 \\ 1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$ quando x está cada vez mais próximo de 0?

Solução:

Observe o gráfico da função na Figura 1.6.

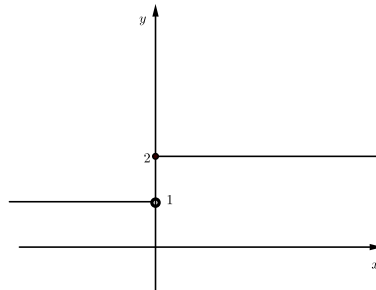


Figura 1.6: Gráfico de $f(x)$.

Percebe-se que quando x se aproxima de 0 por valores menores do que

0, $f(x)$ se aproxima de 1 e quando x se aproxima de 0 por valores maiores do que 0, $f(x)$ se aproxima de $f(0) = 2$. Ou seja, não há um único valor ao qual $f(x)$ se aproxima quando x tende a 0.

Observação 1.2.2. Veja os gráficos das funções f , g e h na Figura 1.7, e o gráfico da função i na figura 1.8.

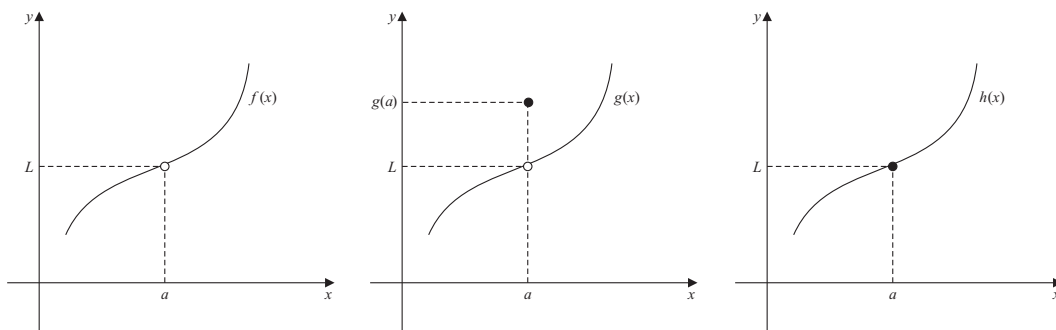


Figura 1.7: Gráfico das funções f , g e h .

Nota-se que nos gráficos das funções f , g e h quando x se aproxima de a , y se aproxima de L , independente do valor de y quando $x = a$. Assim, pode-se dizer que o limite da função f quando x tende a a é L (escreve-se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$) e o mesmo pode ser dito sobre as funções g e h .

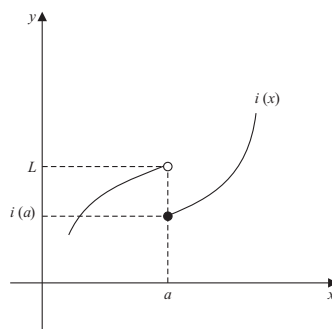


Figura 1.8: Gráfico da função i .

Já para a função i , quando x se aproxima de a para valores maiores que a , i se aproxima de $i(a)$, e quando x se aproxima de a por valores menores que a , $i(x)$ tende a L . Ou seja, não há um valor único ao qual $i(x)$ se aproxima quando x tende a a . Assim, não existe o limite da função i para x tendendo a a .

1.3 Definição formal de limite finito

A linguagem utilizada até aqui não é uma linguagem matemática, pois ao dizer, por exemplo, “ x suficientemente próximo de a ”, não se sabe quantificar o quão próximo x está de a . Então como exprimir em linguagem matemática a definição de $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$?

(a) $f(x)$ deve ser **arbitrariamente próximo** de L para todo x **suficientemente próximo** de a (mas diferente de a).

É necessário definir o conceito de proximidade arbitrária. Para tal, utilizam-se pequenos valores representados geralmente pelas letras gregas como ϵ (epsilon) e δ (delta), que servem de parâmetro de comparação para determinar se um valor está ou não próximo de outro.

Considere um $\epsilon > 0$, arbitrário. Os valores de $f(x)$ são tais que

$$L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon,$$

isto é, sua distância a L é menor do que ϵ , ou seja, $|f(x) - L| < \epsilon$. Portanto, dizer que $f(x)$ é arbitrariamente próximo de L é o mesmo que dizer: dado um $\epsilon > 0$, tem-se $|f(x) - L| < \epsilon$.

Assim, (a) pode ser reescrito como:

(b) Dado $\epsilon > 0$, deve-se ter $|f(x) - L| < \epsilon$ para todo x suficientemente próximo de a (e diferente de a).

Dizer que x é suficientemente próximo de a para $|f(x) - L| < \epsilon$ significa dizer que a sua distância a a é suficientemente pequena para que isto ocorra, ou seja, existe $\delta > 0$ tal que, se $|x - a| < \delta$ e $x \neq a$, então $|f(x) - L| < \epsilon$.

Em suma, dando um $\epsilon > 0$ qualquer, fixa-se a proximidade de $f(x)$ a L . Então se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, deve ser possível encontrar um $\delta > 0$ em correspondência a $\epsilon > 0$, tal que para todo $x \neq a$ cuja a distância até a seja menor que δ , tem-se a distância de $f(x)$ a L menor que ϵ . A partir de (a) e (b), pode-se agora formular a definição formal de limite finito:

Definição 1.3.1. Seja uma função f com domínio $D(f)$, “ a ” um ponto de acumulação de $D(f)$, e L um número real, diz-se que o número L é o limite de $f(x)$ com

x tendendo a “ a ” se, dado qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $\forall x \in D(f)$ e $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - L| < \epsilon$.

Para indicar essa definição, escreve-se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

Observe que a Definição 1.3.1 pode ser reescrita como

Definição 1.3.2. Seja uma função f com domínio $D(f)$, “ a ” um ponto de acumulação de $D(f)$ e L um número real. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que se $x \in V_p(a, \delta)$, então $f(x) \in V_p(L, \epsilon)$.

Observação 1.3.1. Na definição formal de limites, emprega-se o conceito de módulo. A ideia básica no conceito de módulo de um número real é medir a distância desse número até a origem. Por exemplo, $|2| = 2$ significa que 2 dista duas unidades da origem da reta real 0.

Teorema 1.3.1. (Unicidade do limite) Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = M$, então $L = M$.

Demonstração:

Supondo-se por absurdo que $L \neq M$. Sem perda de generalidade, pode-se escrever que $L > M$. Tomando-se $\epsilon = \frac{L - M}{2} > 0$.

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, então existe $\delta_1 > 0$, tal que se $0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - M| < \frac{L - M}{2}$, então

$$f(x) < \frac{L + M}{2}. \quad (1.3.1)$$

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = M$, então existe $\delta_2 > 0$, tal que se $0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{L - M}{2}$, então

$$\frac{L + M}{2} < f(x). \quad (1.3.2)$$

De (1.3.1) e (1.3.2), tem-se que para $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, $0 < |x - a| < \delta$ que implica que $f(x) < f(x)$, o que é um absurdo. Logo a suposição inicial é falsa e $L = M$.

1.4 Construção geométrica que ilustra a noção de limite

Sendo conhecidos f , a , L e ϵ , sabendo que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, necessita-se achar δ que satisfaça a definição de limite. Observe a Figura 1.9. Marcam-se $L + \epsilon$ e $L - \epsilon$ no eixo y e por esses pontos traçam-se retas paralelas ao eixo x , que encontram o gráfico de f nos pontos A e B . Traçando retas paralelas ao eixo dos y por esses pontos, obtêm-se os pontos C e D , intersecções dessas retas com o eixo x . Basta tomar $\delta > 0$ tal que $a - \delta$ e $a + \delta$ sejam pontos do segmento CD . Observe que δ não é único e equivale à distância de a ao extremo mais próximo do intervalo representado pelo segmento CD .

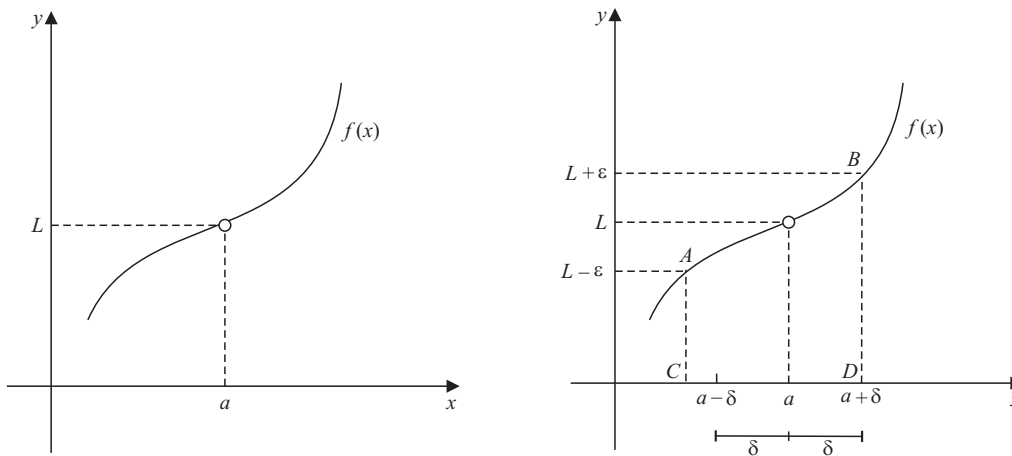


Figura 1.9: Representação geométrica de limite.

Exemplo 1.4.1. Prove formalmente que $\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 4) = 2$.

Solução:

Comparando ao limite geral $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, tem-se nesse caso que $a = 3$, $f(x) = 2x - 4$ e $L = 2$. Assim, deve-se provar que dado qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in D(f)$ e $0 < |x - 3| < \delta$ então $|(2x - 4) - 2| < \epsilon$.

Obtemos o delta procurado a partir da equação:

$$|(2x - 4) - 2| = |2x - 6| = 2 \cdot |x - 3|,$$

pois, como $0 < |x - 3| < \delta$, então $2 \cdot |x - 3| < 2 \cdot \delta$. Escolhendo $\delta = \frac{\epsilon}{2}$:

$$|(2x - 4) - 2| = 2 \cdot |x - 3| < 2 \cdot \delta = 2 \cdot \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \text{ Portanto, } |(2x - 4) - 2| < \epsilon.$$

Logo, dado qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ tal que se $x \in D(f)$ e $0 < |x - 3| < \delta$ então $|(2x - 4) - 2| < \epsilon$, que é justamente a definição de limite.

Assim, $\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 4) = 2$.

Exemplo 1.4.2. Prove formalmente que $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$.

Solução:

Comparando com o limite geral $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, tem-se que $a = 2$, $f(x) = x^2$ e $L = 4$. Assim, deve-se provar que dado um $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in D(f)$ e $0 < |x - 2| < \delta$, então $|(x^2) - 4| < \epsilon$. Fatorando: $|x^2 - 4| = |x - 2| \cdot |x + 2|$.

É preciso determinar uma desigualdade envolvendo $|x + 2|$ e um valor constante. Como $|x - 2| < \delta$, então supondo $\delta = 1$ tem-se que $|x - 2| < 1$. Portanto:

$$\begin{aligned} -1 &< x - 2 < 1 \\ 1 &< x < 3 \\ 3 &< x + 2 < 5. \end{aligned}$$

Como $|x - 2| < \delta$ e $|x + 2| < 5$, então $|x - 2| \cdot |x + 2| < 5 \cdot \delta$. Assim, escolhendo $\delta = \min \left\{ 1, \frac{\epsilon}{5} \right\}$, ou seja, o menor entre os valores 1 e $\frac{\epsilon}{5}$, tem-se:

$$\begin{aligned} |x - 2| \cdot |x + 2| &< 5 \cdot \delta \\ |x^2 - 4| &< 5 \cdot \frac{\epsilon}{5} \\ |x^2 - 4| &< \epsilon. \end{aligned}$$

Logo, dado qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta = \min \left\{ 1, \frac{\epsilon}{5} \right\}$ tal que se $x \in D(f)$ e $0 < |x - 2| < \delta$, então $|x^2 - 4| < \epsilon$.

Portanto, $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$.

Exemplo 1.4.3. Considere que $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$. Dado $\epsilon = 0,05$, determine $\delta > 0$ tal que $|x - 2| < \delta$ sempre que $|(x^2) - 4| < \epsilon$.

Solução:

No exemplo 1.4.1, foi visto que escolhendo $\delta = \min \left\{ 1, \frac{\epsilon}{5} \right\}$ obtém-se a definição do limite para esse caso. Como $\epsilon = 0,05$, então:

$$\begin{aligned}\delta &= \min \left\{ 1, \frac{0,05}{5} \right\} \\ &= \min \left\{ 1, \frac{1}{100} \right\} \\ &= \frac{1}{100} \\ \delta &= 0,01.\end{aligned}$$

Assim, $|x - 2| < 0,01$ sempre que $|(x^2) - 4| < 0,05$.

Exercício 1.4.1. Mostre que $\lim_{x \rightarrow -2} (3x + 7) = 1$. Em seguida, dado $\epsilon = 0,03$, determine $\delta > 0$ tal que $|(3x + 7) - 1| < \epsilon$ sempre que $|x + 2| < \delta$.

Exercício 1.4.2. Prove que o limite de $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leq 0 \\ 2, & \text{se } x > 0 \end{cases}$ quando x tende a zero não existe.

1.5 Limites Laterais

1.5.1 Definição de limite à direita

Seja uma função f definida pelo menos em um intervalo (a, b) , diz-se que o número L é o limite de $f(x)$ com x tendendo a a pela direita se, dado qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $0 < x - a < \delta$ então $|f(x) - L| < \epsilon$.

Para indicar essa expressão, escreve-se $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$.

1.5.2 Definição de limite à esquerda

Seja uma função f definida pelo menos em um intervalo (c, a) , diz-se que o número L é o limite de $f(x)$ com x tendendo a a pela esquerda se, dado qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $-\delta < x - a < 0$ então $|f(x) - L| < \epsilon$.

Para indicar essa expressão, escreve-se $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$.

Teorema 1.5.1. (Existência do limite finito) O limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ existe e é igual a L se, e somente se, os limites laterais $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ existirem e ambos forem iguais a L .

Demonstração:

Tem-se que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$. Portanto, pela definição de limite, $\forall \epsilon > 0$
 $\exists \delta > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta$, então $|f(x) - L| < \epsilon$.

Note que

$$0 < |x - a| < \delta \text{ se e somente se } -\delta < x - a < 0 \text{ ou } 0 < x - a < \delta.$$

Pode-se afirmar que $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que

$$\text{se } -\delta < x - a < 0, \text{ então } |f(x) - L| < \epsilon$$

e

$$\text{se } 0 < x - a < \delta, \text{ então } |f(x) - L| < \epsilon.$$

Finalmente, $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$.

Exemplo 1.5.1. Considere as funções $f(x) = \frac{|x|}{x}$ e $g(x) = |x|$. Calcule, se houver:

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

e) $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

Solução:

Antes de determinar os limites solicitados será construído o gráfico da função $f(x)$.

Considere um número real $a > 0$. Calculando o valor de $f(x)$ para $x = a$:

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{|a|}{a} \\ &= \frac{a}{a} \end{aligned}$$

$$f(a) = 1.$$

Agora, calculando $f(x)$ quando $x = -a$:

$$\begin{aligned} f(-a) &= \frac{|-a|}{-a} \\ &= \frac{a}{-a} \end{aligned}$$

$$f(-a) = -1.$$

Como o denominador de $f(x)$ não pode ser nulo, então essa função não está definida para $x = 0$. Assim, a função $f(x)$ pode ser reescrita como:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } x < 0 \\ 1, & \text{se } x > 0 \end{cases} \text{ e seu gráfico pode ser visto na Figura 1.10 a). Na Figura 1.10 b) está a representação gráfica de } g(x) = |x|.$$

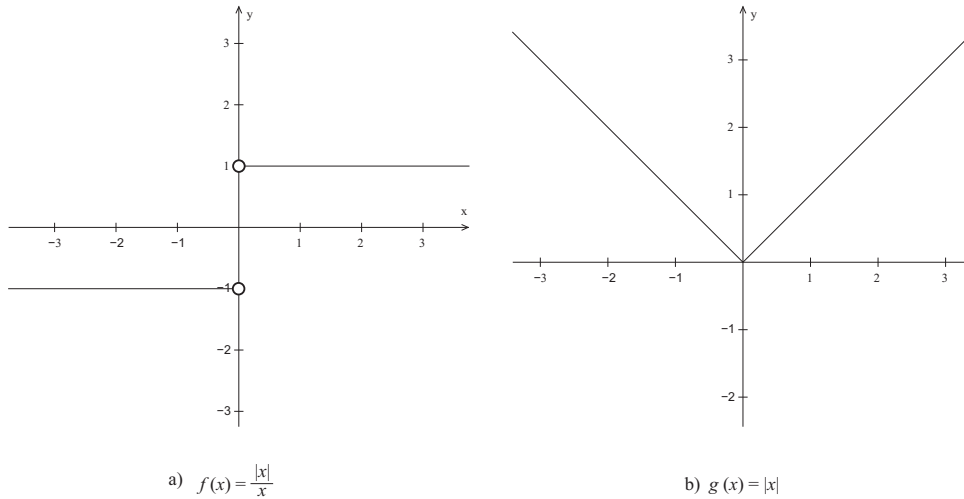


Figura 1.10: Gráficos de $f(x)$ e $g(x)$.

Resolvendo cada um dos itens:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ corresponde ao limite lateral para x tendendo a 0 pela direita. Na Figura 1.11, pode-se ver que quando x se aproxima de 0 pela direita, o valor de y se mantém igual a 1.

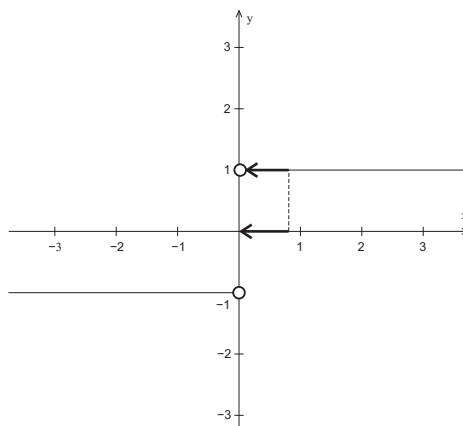


Figura 1.11: Representação do limite lateral à direita em $f(x)$.

$$\text{Assim, } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1.$$

- b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ corresponde ao limite lateral para x tendendo a 0 pela esquerda. Observe-se na Figura 1.12 que à medida que x se aproxima de 0 pela esquerda, y se mantém com valor igual a -1 .

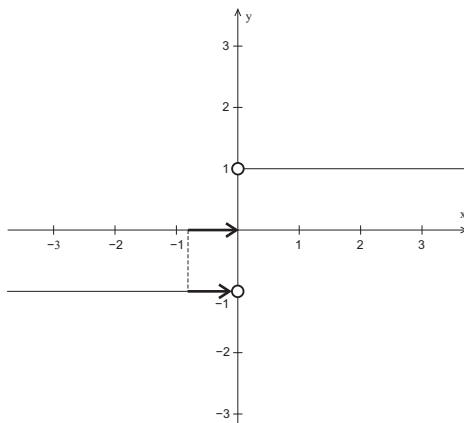


Figura 1.12: Representação do limite lateral à esquerda em $f(x)$.

Ou seja, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$.

- c) Para $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ existir, os limites laterais para x tendendo a 0 pela direita e pela esquerda devem existir e serem iguais. Como foi visto nos itens anteriores, esses limites existem, mas são diferentes. Logo, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ não existe. Observe na Figura 1.13 como os valores da função não se aproximam de um mesmo valor para valores x próximos de 0.

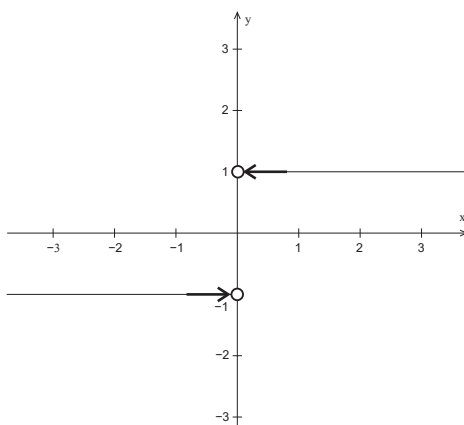


Figura 1.13: Gráfico de $f(x)$.

- d) Para calcular $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$, analisam-se os valores de y quando x se aproxima de 0 pela direita. Observando o gráfico de $g(x)$ na Figura 1.14, percebe-se que y

também fica cada vez mais próximo de 0 nesse sentido, ou seja, $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$.

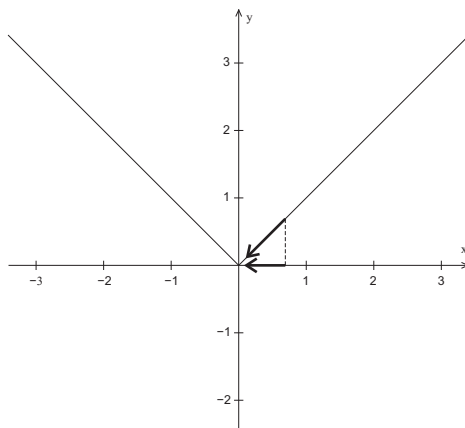


Figura 1.14: Representação do limite lateral à direita em $g(x)$.

- e) $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$ é obtido observando o comportamento de y quando x se aproxima de 0 pela esquerda. Pode ser verificado na Figura 1.15 que y se aproxima de 0 quando x tende a 0 pela esquerda, então $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 0$.

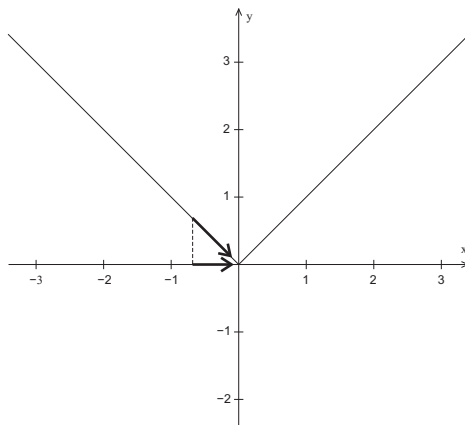
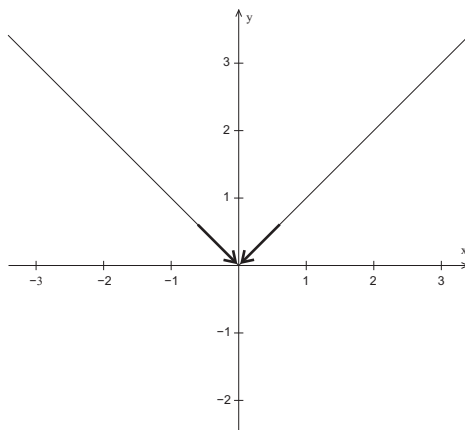


Figura 1.15: Representação do limite lateral à esquerda em $g(x)$.

- f) Para $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ existir, os limites laterais para x tendendo a 0 pela direita e pela esquerda devem existir e serem iguais. Foi visto nos itens anteriores que eles de fato existem e ambos são iguais a 0. Assim, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$. Veja na Figura 1.16 como as imagens da função se aproximam do mesmo número para valores de x próximos de zero.

Exercício 1.5.1. Seja a função $f(x) = \sqrt{x}$, determine, se houver:

Figura 1.16: Gráfico de $g(x)$.

- a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$
 b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$
 c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Exercício 1.5.2. Para cada um dos casos a seguir, calcule o limite L , depois determine $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < 0,01$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$.

- a) $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x - 4}$
 b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$
 c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2}$.

Respostas dos exercícios

1.5.1. a) Não existe. b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ c) Não existe.

1.5.2.

- a) $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x - 4} = 1, \delta = 0,01$
 b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = 1, \delta = 0,01$
 c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2} = 1, \delta = 0,01$.

1.6 Propriedades usadas no cálculo de limites

Sejam L , M , a e k números reais e $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$. Então, as seguintes propriedades são válidas:

1.6.1 Limite de uma constante

O limite de uma constante é a própria constante:

$$\lim_{x \rightarrow a} k = k.$$

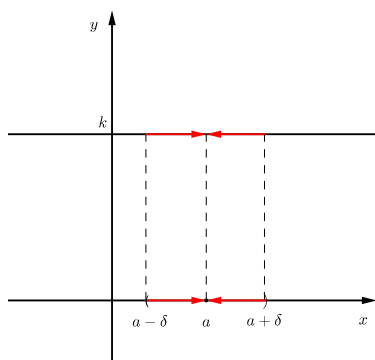


Figura 1.17: Limite de uma constante.

Demonstração:

Seja $\epsilon > 0$, deve-se mostrar que existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta$, então $|k - k| < \epsilon$.

Mas como $|k - k| = 0$, pode-se atribuir qualquer número positivo para δ tal que se $0 < |x - a| < \delta$ então $|k - k| < \epsilon$.

Logo $\lim_{x \rightarrow a} k = k$.

Exemplo 1.6.1. Calcule os limites:

a) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{2}$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \pi$.

Solução:

Pela propriedade 1.6.1, tem-se:

a) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \pi = \pi$.

1.6.2 Limite da função identidade

O limite da função identidade $f(x) = x$ é o valor de a :

$$\lim_{x \rightarrow a} x = a.$$

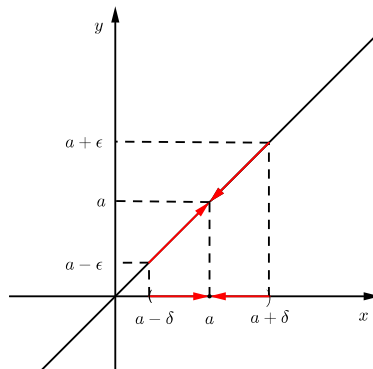


Figura 1.18: Limite da função identidade.

Exemplo 1.6.2. Resolva os limites a seguir:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} x$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} x.$

Pela propriedade 1.6.2, tem-se:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} x = 3$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} x = -1.$

Exercício 1.6.1. Utilizando a definição formal de limite, mostre que $\lim_{x \rightarrow a} x = a.$

1.6.3 Limite da soma

O limite da soma de duas funções é a soma de seus limites:

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) + g(x)\} = L + M.$$

Demonstração:

Seja $\epsilon > 0$, considera-se $\frac{\epsilon}{2}$ para ser utilizado na definição de limite. Assim:

$$\text{Existe } \delta_1 > 0 \text{ tal que se } 0 < |x - a| < \delta_1, \text{ então } |f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2}. \quad (1.6.1)$$

Existe $\delta_2 > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta_2$ então $|f(x) - M| < \frac{\epsilon}{2}$. (1.6.2)

Deve-se escolher $\delta > 0$ tal que (1.6.1) e (1.6.2) sejam verdadeiras, o que acontece para $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. De fato:

Se $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) + g(x) - (L + M)| \leq |f(x) - L| + |g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

Portanto, $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) + g(x)\} = L + M$.

1.6.4 Limite da diferença

O limite da diferença de duas funções é a diferença de seus limites:

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) - g(x)\} = L - M.$$

Exemplo 1.6.3. Verifique que $\lim_{x \rightarrow 3} (2 + x) = 5$ e $\lim_{x \rightarrow -1} (x - 4) = -5$.

Solução:

Pelas propriedades 1.6.3 e 1.6.4, tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow 3} (2 + x) = \lim_{x \rightarrow 3} 2 + \lim_{x \rightarrow 3} x = 2 + 3 = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x - 4) = \lim_{x \rightarrow -1} x - \lim_{x \rightarrow -1} 4 = -1 - 4 = -5.$$

Exercício 1.6.2. Aplicando a definição formal de limite, mostre que:

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) - g(x)\} = L - M.$$

1.6.5 Limite do produto

O limite do produto de duas funções é o produto de seus limites:

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \cdot g(x)\} = L \cdot M.$$

Demonstração:

Deseja-se provar que $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \cdot g(x)\} = L \cdot M$. Primeiro demonstrar-se-á um caso particular onde o produto dos limites de duas funções resulta em zero, através da definição de limite, para posteriormente, através das propriedades apresentadas nessa seção, obter a expressão procurada.

Considerando o caso particular onde h é uma função tal que $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = 0$, logo deseja-se provar que $\lim_{x \rightarrow a} [h(x) \cdot f(x)] = 0$.

Como $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e sendo $\epsilon > 0$, considera-se $\epsilon = 1$ para ser utilizado na definição de limite. Assim existe $\delta_1 > 0$, tal que se $0 < |x - a| < \delta_1$, então

$$|f(x) - L| < 1. \quad (1.6.3)$$

Pode-se escrever $|f(x)| = |f(x) - L + L| < |f(x) - L| + |L| < 1 + L$, e portanto, existe $\delta_1 > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta_1$ então

$$|h(x)| \cdot |f(x)| < |h(x)| \cdot (1 + |L|). \quad (1.6.4)$$

Assim, sendo $\epsilon > 0$, considera-se $\frac{\epsilon}{1 + |L|}$ para ser utilizado na definição de limite da função h tendendo a a da seguinte forma: existe $\delta_2 > 0$, tal que se $0 < |x - a| < \delta_2$, então

$$|h(x) - 0| = |h(x)| < \frac{\epsilon}{1 + |L|}. \quad (1.6.5)$$

Para que (1.6.4) e (1.6.5) se verifiquem, toma-se $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, logo existe $\delta > 0$, tal que se $0 < |x - a| < \delta$, então

$$|h(x) \cdot f(x) - 0| < (1 + |L|) \cdot \frac{\epsilon}{1 + |L|} = \epsilon. \quad (1.6.6)$$

Portanto, $\lim_{x \rightarrow a} h(x) \cdot f(x) = 0$.

Agora, lembrando que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, observa-se que:

$$\begin{aligned} f(x) \cdot g(x) - L \cdot M &= f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot M + f(x) \cdot M - L \cdot M \\ &= f(x) \cdot [g(x) - M] + M \cdot [f(x) - L]. \end{aligned}$$

Ou ainda, através da propriedade do limite da soma 1.6.3:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x) - L \cdot M] = \lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \cdot [g(x) - M]\} + \lim_{x \rightarrow a} \{M \cdot [f(x) - L]\}. \quad (1.6.7)$$

Como $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, então $\lim_{x \rightarrow a} f(x) - L = 0$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) - M = 0$, e portanto, através da propriedade demonstrada no caso particular, tem-se que:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot [g(x) - M] = 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \cdot [f(x) - L] = 0. \quad (1.6.8)$$

De (1.6.7) e (1.6.8), e utilizando as propriedades do limite da diferença 1.6.4 e do limite de uma constante 1.6.1 conclui-se que:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x) - L \cdot M] &= 0 + 0 \\ \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] - \lim_{x \rightarrow a} [L \cdot M] &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] &= \lim_{x \rightarrow a} [L \cdot M] \\ \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] &= L \cdot M.\end{aligned}$$

Logo, $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$.

1.6.6 Limite do quociente

O limite do quociente de duas funções é o quociente de seus limites, desde que o limite do denominador não seja zero:

$$\lim_{x \rightarrow a} \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\} = \frac{L}{M}, M \neq 0.$$

Exemplo 1.6.4. Resolva os limites:

- a) $\lim_{x \rightarrow 2} (2 + x)x$
b) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x + 1}{3 - x}$.

Solução:

Pelas propriedades 1.6.5 e 1.6.6, tem-se:

- a) $\lim_{x \rightarrow 2} (2 + x)x = \lim_{x \rightarrow 2} (2 + x) \cdot \lim_{x \rightarrow 2} x = (2 + 2) \cdot 2 = 8$
b) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x + 1}{3 - x} = \frac{\lim_{x \rightarrow -3} (x + 1)}{\lim_{x \rightarrow -3} (3 - x)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

1.6.7 Limite da multiplicação por uma constante

O limite de uma constante multiplicada por uma função é a constante multiplicada pelo limite da função:

$$\lim_{x \rightarrow a} \{k \cdot f(x)\} = k \cdot L.$$

Exemplo 1.6.5. Usando a propriedade 1.6.7, calcule os limites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} 3x$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{3}x.$

Solução:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} 3x = 3 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x = 3 \cdot 0 = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{3}x = \frac{1}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow -1} x = \frac{1}{3} \cdot (-1) = -\frac{1}{3}.$

Exercício 1.6.3. Através da definição formal de limite, sabendo que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, mostre que $\lim_{x \rightarrow a} \{k \cdot f(x)\} = k \cdot L$.

1.6.8 Limite da potenciação

O limite da n -ésima potência de uma função é igual à n -ésima potência do limite da função:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n = L^n.$$

Ou ainda:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = L^M.$$

Demonstração:

Reescreve-se a potência como uma multiplicação de n fatores:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot f(x) \cdot f(x) \cdot \dots \cdot f(x)].$$

Da propriedade do limite do produto 1.6.5, tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \dots \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

Mas como são n fatores, então:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n.$$

$$\text{Logo, } \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n = L^n.$$

Exemplo 1.6.6. Usando a propriedade 1.6.8, resolva os limites:

a) $\lim_{x \rightarrow -1} (3x)^4$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} 4x^2.$

Solução:

a) $\lim_{x \rightarrow -1} (3x)^4 = \left(\lim_{x \rightarrow -1} 3x \right)^4 = (-3)^4 = 81$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} 4x^2 = 4 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 4 \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 1} x \right)^2 = 4(1)^2 = 4.$

1.6.9 Limite da radiciação

O limite da raiz n -ésima de uma função é igual à raiz n -ésima do limite da função:

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{L},$$

se $L > 0$ e n é um inteiro positivo ou se $L \leq 0$ e n é um inteiro positivo ímpar.

Exemplo 1.6.7. Calcule os limites:

a) $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[5]{3x}.$

Solução:

Aplicando as propriedades 1.6.7, 1.6.8 e 1.6.9, tem-se:

a) $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 4} x} = \sqrt{4} = 2$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[5]{3x} = \sqrt[5]{\lim_{x \rightarrow 2} 3x} = \sqrt[5]{\lim_{x \rightarrow 2} 3 \cdot \lim_{x \rightarrow 2} x} = \sqrt[5]{6}.$

1.6.10 Limite de uma função polinomial

Para qualquer polinômio, $p(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n$ e qualquer número real a , então:

$$\lim_{x \rightarrow a} p(x) = p(a).$$

Demonstração:

Essa propriedade é consequência direta das propriedades do limite da soma 1.6.3 e do limite da multiplicação por uma constante 1.6.7:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} p(x) &= \lim_{x \rightarrow a} [c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n] \\ &= \lim_{x \rightarrow a} c_0 + \lim_{x \rightarrow a} c_1x + \lim_{x \rightarrow a} c_2x^2 + \dots + \lim_{x \rightarrow a} c_nx^n \\ &= c_0 + c_1 \cdot \lim_{x \rightarrow a} x + c_2 \cdot \lim_{x \rightarrow a} x^2 + \dots + c_n \cdot \lim_{x \rightarrow a} x^n \\ \lim_{x \rightarrow a} p(x) &= c_0 + c_1a + c_2a^2 + \dots + c_na^n.\end{aligned}$$

Logo $\lim_{x \rightarrow a} p(x) = p(a)$.

Exemplo 1.6.8. Usando as propriedades operatórias dos limites mostre que

$$\lim_{x \rightarrow -2} (3x^5 + 4x^4 - x^2) = -28 \text{ e } \lim_{x \rightarrow 0} (2x^4 + 4x^3 - x^2 + 5) = 5.$$

Solução:

Pela propriedade 1.6.10, tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow -2} (3x^5 + 4x^4 - x^2) = 3 \cdot (-2)^5 + 4 \cdot (-2)^4 - (-2)^2 = -96 + 64 + 4 = -28$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (2x^4 + 4x^3 - x^2 + 5) = 2 \cdot (0)^4 + 4 \cdot (0)^3 - (0)^2 + 5 = 5.$$

1.6.11 Limite de uma função racional

Seja a função racional $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, então seu limite é dado por:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}, \text{ desde que } Q(a) \neq 0.$$

Exemplo 1.6.9. Calcule os limites a seguir:

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 4x^2 - 3}{x^2 + 5}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x - 5}{x - 1}$.

Solução: Pela propriedade 1.6.11, tem-se:

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 4x^2 - 3}{x^2 + 5} = \frac{(-1)^3 + 4 \cdot (-1)^2 - 3}{(-1)^2 + 5} = \frac{0}{6} = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x - 5}{x - 1} = \frac{-5}{-1} = 5.$

1.6.12 Limite do logaritmo de uma função

O limite do logaritmo de uma função é igual ao logaritmo do limite da função:

$$\lim_{x \rightarrow a} \{\log_{\beta}[f(x)]\} = \log_{\beta} \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right] = \log_{\beta}(L), L > 0, 0 < \beta \neq 1.$$

Exemplo 1.6.10. Pela propriedade 1.6.12, tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow e} \ln(x^2) = \ln \left(\lim_{x \rightarrow e} x^2 \right) = \ln(e^2) = 2.$$

Observação 1.6.1. A propriedade 1.6.12 pode ser utilizada para logaritmos de base β tal que $0 < \beta \neq 1$.

Exemplo 1.6.11. Calcule os limites:

- | | |
|---|---|
| a) $\lim_{x \rightarrow 5} (x^2 + 3x)$ | e) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x-1}$ |
| b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 1}{x + 5}$ | f) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{9 - x^2}$ |
| c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} (2x + 5)$ | g) $\lim_{x \rightarrow 1^+} [\ln(x^2 + 1)]$ |
| d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} (x + 4)^5$ | h) $\lim_{x \rightarrow 3} [\ln(x^2 - 4x + 4)]$. |

Solução:

- a) Como $\lim_{x \rightarrow 5} (x^2 + 3x)$ representa o limite de uma função polinomial, então basta calcular o valor da função para $x = 5$ (para onde x está tendendo) utilizando a propriedade do limite de um polinômio 1.6.10. Assim:

$$\lim_{x \rightarrow 5} (x^2 + 3x) = (5)^2 + 3(5) = 40.$$

Portanto, $\lim_{x \rightarrow 5} (x^2 + 3x) = 40$.

- b) Pelo fato de $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 1}{x + 5}$ representar o limite de uma função racional, utilizando a propriedade do limite de um quociente 1.6.6 basta calcular o valor dessa função para $x = 3$, desde que o denominador não seja nulo. Então:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 1}{x + 5} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 1)}{\lim_{x \rightarrow 3} (x + 5)} = \frac{(3)^2 - 1}{(3) + 5} = 1.$$

$$\text{Logo, } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 1}{x + 5} = 1.$$

- c) Sendo $\lim_{x \rightarrow 2^+} (2x + 5)$ um limite lateral com x tendendo a 2 pela direita, pode-se fazer uma mudança de variável para se obter uma expressão que resulte no mesmo limite solicitado. Note que se x tende a 2 por valores um pouco maiores do que 2, pode-se dizer que $x = 2 + h$, onde h é um número positivo muito próximo de zero, e assim, obtém-se:

$$\lim_{h \rightarrow 0} [2(2 + h) + 5].$$

Observe que h é a distância de x até o ponto para o qual x está tendendo, assim, quando h se aproxima muito de 0, $(2 + h)$ se aproxima muito de 2 pela direita, por isso as duas expressões são equivalentes. Como o lado direito da igualdade representa o limite finito de uma função polinomial, basta calcular o valor dessa função para $h = 0$. Assim:

$$\lim_{h \rightarrow 0} 2(2 + h) + 5 = 2(2 + 0) + 5 = 9.$$

$$\text{Portanto, } \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x + 5) = 9.$$

- d) Assim como no item anterior, pode-se obter um limite que produza o mesmo resultado de $\lim_{x \rightarrow 3^-} (x + 4)^5$. Como x se aproxima de 3 por valores um pouco menores do que 3, substitui-se x por $(3 - h)$, onde h é positivo e muito próximo de zero, e obtém-se:

$$\lim_{h \rightarrow 0} [(3 - h) + 4]^5.$$

O valor de h segue representando a distância de x até o ponto para onde x está tendendo, nesse caso a distância até 3, e por isso se utiliza a expressão $3 - h$ para representar valores à esquerda (menores) do que 3. E quando h tende a 0, a função se aproxima do mesmo ponto de quando x se aproxima de 3 pela esquerda. Calculando:

$$\lim_{h \rightarrow 0} [(3 - h) + 4]^5 = [(3 - 0) + 4]^5 = 16.807.$$

Logo, $\lim_{x \rightarrow 3^-} (x + 4)^5 = 16.807$.

- e) Sendo h a distância de x até o ponto para onde x está tendendo, substitui-se x por $(1 + h)$ e obtém-se o limite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{(1 + h) - 1}.$$

A propriedade do limite de uma radiciação 1.6.9 permite que se obtenha a igualdade: $\lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{(1 + h) - 1} = \sqrt{\lim_{h \rightarrow 0} (1 + h) - 1}$. Como o índice da raiz é par, o limite $\lim_{h \rightarrow 0} (1 + h) - 1$ deve ser maior ou igual a zero para que $\lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{(1 + h) - 1}$ exista. E como $(1 + h) - 1$ representa uma função polinomial, pode-se encontrar o limite dessa função quando h tende a zero calculando o valor dessa função para $h = 0$, logo:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{(1 + h) - 1} &= \sqrt{\lim_{h \rightarrow 0} (1 + h) - 1} \\ &= \sqrt{(1 + 0) - 1} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{(1 + h) - 1} &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x - 1} = 0$.

- f) Pelo fato de h representar a distância de x até o ponto para onde x está tendendo, substituindo x por $(3 - h)$ tem-se que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{9 - (3 - h)^2}.$$

Utilizando as propriedades do limite da radiciação 1.6.9 e do limite de um polinômio 1.6.10, calcula-se:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{9 - (3 - h)^2} &= \sqrt{\lim_{h \rightarrow 0} 9 - (3 - h)^2} \\ &= \sqrt{9 - (3 - 0)^2} \\ &= \sqrt{9 - 9} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{9 - (3 - h)^2} &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, $\lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{9 - x^2} = 0$.

- g) Sendo h a distância de x até o ponto para onde x está tendendo, substitui-se x por $(1 + h)$ e se obtém o limite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \ln[(1 + h)^2 + 1].$$

Utilizando as propriedades do limite de um logaritmo natural 1.6.12 e do limite de um polinômio 1.6.10, calcula-se:

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \ln[(1+h)^2 + 1] &= \ln \left[\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^2 + 1 \right] \\ &= \ln[(1+0)^2 + 1] \\ \lim_{h \rightarrow 0} \ln[(1+h)^2 + 1] &= \ln(2).\end{aligned}$$

$$\text{Portanto, } \lim_{x \rightarrow 1^+} [\ln(x^2 + 1)] = \ln(2).$$

h) Utilizando a propriedade do limite de um logaritmo natural 1.6.12 e do limite de um polinômio 1.6.10, calcula-se:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} [\ln(x^2 - 4x + 4)] &= \ln \left[\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 4x + 4) \right] \\ &= \ln [(3)^2 - 4(3) + 4] \\ &= \ln(1) \\ \lim_{x \rightarrow 3} [\ln(x^2 - 4x + 4)] &= 0.\end{aligned}$$

$$\text{Logo, } \lim_{x \rightarrow 3} [\ln(x^2 - 4x + 4)] = 0.$$

Exemplo 1.6.12. Esboce o gráfico da função $f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{se } x < 1 \\ x^2 - 1, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$. Calcule, se houver:

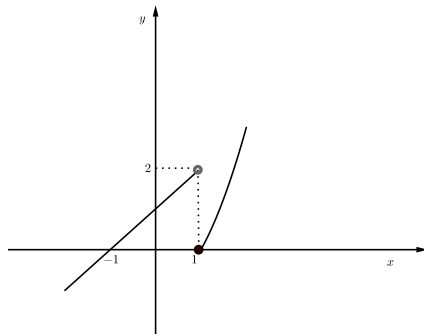
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Solução:

O gráfico da função $f(x)$ pode ser visualizado na Figura 1.19.

- Calcular o limite de $f(x)$ quando x tende a 1 pela direita significa determinar o comportamento de $f(x)$ quando x assume valores muito próximos de 1, mas maiores que 1. Assim, para $x \geq 1$, $f(x) = x^2 - 1$. Para calcular o limite lateral à direita, substitui-se x por $(1+h)$, e obtém-se o seguinte limite com h tendendo a zero:

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^2 - 1.$$

Figura 1.19: Gráfico de $f(x)$.

Utilizando a propriedade do limite de um polinômio 1.6.10, calcula-se:

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1 + h)^2 - 1 = (1 + 0)^2 - 1 = 0.$$

Logo, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$.

- b) Da mesma forma, quando x tende a 1 pela esquerda, significa que x está assumindo valores menores que 1. Como para $x < 1$, $f(x) = x + 1$, então o limite lateral pode ser calculado substituindo x por $(1 - h)$, e obtendo o seguinte limite com h tendendo a zero:

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1 - h) + 1.$$

Utilizando a propriedade do limite de um polinômio 1.6.10, calcula-se:

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1 - h) + 1 = (1 - 0) + 1 = 2.$$

Portanto, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$.

- c) Segundo o teorema da existência do limite finito 1.5.1, como $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, então não existe limite de $f(x)$ para x tendendo a 1.

Exemplo 1.6.13. A derivada de uma função $f(x)$ representa a inclinação da reta tangente à curva em um ponto e é definida como $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Determine a derivada da função $f(x) = x^2$.

Solução:

Aplicando a fórmula de $f'(x)$ para o caso onde $f(x) = x^2$, calcula-se:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h}
 \end{aligned}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} (2x+h).$$

Utilizando a propriedade do limite de um polinômio 1.6.10

$$\lim_{h \rightarrow 0} (2x+h) = 2x + (0) = 2x.$$

Portanto, $f'(x) = 2x$.

Exercício 1.6.4. Considere a função $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ 2x, & \text{se } 0 < x < 1 \\ 1, & \text{se } x = 1 \\ -2x + 4, & \text{se } 1 < x < 2 \\ 0, & \text{se } 2 < x < 3 \end{cases}$, res-

ponda:

- Existe $f(-1)$? Em caso afirmativo, calcule seu valor.
- Existe $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$? Em caso afirmativo, calcule seu valor.
- O valor de $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ é igual a $f(-1)$?
- Existe $f(1)$? Em caso afirmativo, calcule $f(1)$.
- Existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$? Justifique sua resposta.
- Os valores de $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ e $f(1)$ são iguais?

Resposta do exercício

1.6.4.

- Sim, $f(-1) = 0$.
- Sim, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 0$.
- Sim.
- Sim, $f(1) = 1$.
- Sim, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$.
- Não.

1.7 Limites infinitos

Se os valores de $f(x)$ crescem indefinidamente quando x tende a a , escreve-se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$. Isso significa que para cada $M > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > M$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$. Veja a representação gráfica na Figura 1.20.

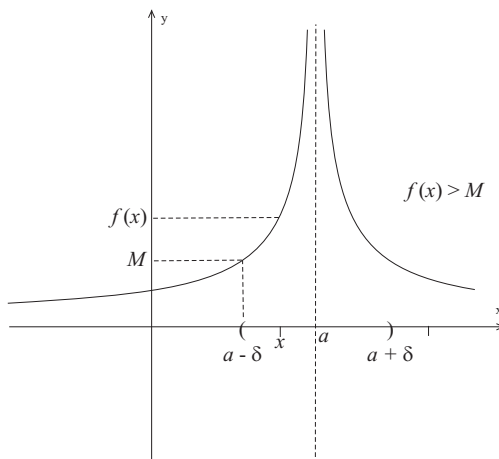


Figura 1.20: Gráfico de $f(x)$.

Da mesma forma, se $f(x)$ decresce indefinidamente quando x tende a a , escreve-se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$. Formalmente, diz-se que para cada $N < 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < N$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$, como pode ser visto na Figura 1.21.

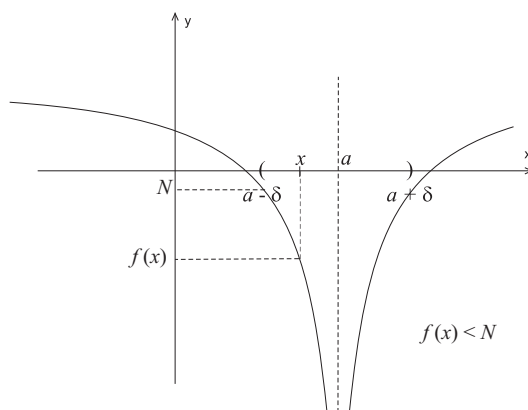


Figura 1.21: Gráfico de $f(x)$.

Definição 1.7.1. A reta vertical $x = a$ é chamada **assíntota vertical** ao gráfico de $f(x)$ se pelo menos uma das seguintes condições for verdadeira:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty & & \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty & & \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty.\end{aligned}$$

Observação 1.7.1. Basta que um dos quatro limites da Definição 1.7.1 se verifique para que o gráfico de $f(x)$ tenha uma assíntota vertical.

Observação 1.7.2. Uma maneira de determinar as assíntotas verticais em um gráfico consiste em investigar os pontos onde a função não está definida, pois caso a assíntota vertical seja a reta $x = a$, então obrigatoriamente $a \notin D(f)$.

Exemplo 1.7.1. Mostre que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

Solução:

Deve-se mostrar que para qualquer $M > 0$, existe $\delta > 0$ tal que,

$$\frac{1}{x^2} > M. \tag{1.7.1}$$

sempre que $0 < |x - 0| < \delta$, ou seja, $0 < |x| < \delta$.

Tomando-se $x > 0$, tem-se que $|x| = x$.

Pela desigualdade (1.7.1), obtém-se um indicativo para a melhor escolha de δ . Para $x > 0$, as seguintes desigualdades são equivalentes,

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2} &> M \\ x^2 &< \frac{1}{M} \\ x &< \sqrt{\frac{1}{M}}.\end{aligned}$$

Assim, tomando-se $\delta = \sqrt{\frac{1}{M}}$, tem-se que

$$\frac{1}{x^2} > M \text{ sempre que } 0 < |x - 0| < \delta, \text{ ou seja, } 0 < |x| < \delta.$$

Exemplo 1.7.2. Considerando a função $f(x) = \frac{1}{x}$.

a) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

b) Determine a(s) assíntota(s) vertical(is), se houver.

Solução:

- a) A definição de limite permite mostrar que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$. Deve-se mostrar que para qualquer $M > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $0 < x < \delta$, então $\frac{1}{|x|} > M$. Tomando-se $\delta = \frac{1}{M}$, tem-se que $|x| < \frac{1}{M}$ e, portanto, $\frac{1}{|x|} > M$. Logo, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.
- b) Pela Definição 1.7.1 e pelo resultado do item anterior, conclui-se que $x = 0$ é assíntota vertical de $f(x) = \frac{1}{x}$.

Para valores inteiros positivos de n , o comportamento da função $f(x) = \frac{1}{x^n}$ na vizinhança de $x = 0$ é caracterizado no Teorema 1.7.1.

Teorema 1.7.1. (Comportamento da função $f(x) = \frac{1}{x^n}$ quando x tende a zero) Se n é um número inteiro positivo, então

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty, & \text{se } n \in \{2, 4, 6, 8, \dots\} \\ \text{não existe,} & \text{se } n \in \{1, 3, 5, 7, \dots\} \end{cases}.$$

Exemplo 1.7.3. Em cada caso, calcule $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e indique se a reta $x = a$ é assíntota vertical:

a) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x}{x-4}$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x-3)^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3+x^2}}{x}$.

Solução:

a) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x}{x-4}$

Para calcular $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x}{x-4}$ deve-se, primeiramente, obter os limites laterais, uma vez que para $x = 4$ o denominador é nulo.

Estudar o limite quando x tende a 4 pela esquerda significa determinar o comportamento da função quando x assume valores muito próximos de

4, mas menores que 4. Para determinar o limite lateral à esquerda, substitui-se x por $(4 - h)$ e obtém-se,

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x}{x - 4} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 - h}{(4 - h) - 4} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 - h}{-h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{4}{-h} + 1 \right).$$

Aplicando-se as propriedades operatórias 1.6.3, 1.6.1 e 1.6.7,

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x}{x - 4} = 1 - 4 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}.$$

Pelo teorema 1.7.1, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} = +\infty$. Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x}{x - 4} = 1 - 4 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} = -\infty.$$

Repete-se o processo para obter o limite lateral à direita, ou seja, determinar o comportamento da função quando x assume valores muito próximos de 4, mas maiores que 4. Para determinar o limite lateral à direita, substitui-se x por $(4 + h)$ e obtém-se,

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x}{x - 4} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 + h}{(4 + h) - 4} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 + h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{4}{h} + 1 \right) = +\infty.$$

Como

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x}{x - 4} = -\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x}{x - 4} = +\infty, \quad (1.7.2)$$

pode-se afirmar que não existe $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x}{x - 4}$.

Pela Definição 1.7.1 e pelo resultado (1.7.2), pode-se afirmar que $x = 4$ é assíntota vertical de $f(x) = \frac{x}{x - 4}$.

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x - 3)^2}$

Deve-se, primeiramente, obter os limites laterais, uma vez que para $x = 3$ o denominador é nulo.

Para determinar o limite lateral à esquerda, substitui-se x por $(3 - h)$ e obtém-se,

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{(x - 3)^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(3 - h - 3)^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(-h)^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2}.$$

Pelo Teorema 1.7.1, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} = +\infty$. Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{(x-3)^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} = +\infty.$$

Para determinar o limite lateral à direita, substitui-se x por $(3+h)$ e obtém-se,

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{(x-3)^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(3+h-3)^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} = +\infty.$$

Como

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{(x-3)^2} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{(x-3)^2} = +\infty, \quad (1.7.3)$$

pode-se afirmar que $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x-3)^2} = +\infty$.

Pela Definição 1.7.1 e pelo resultado (1.7.3), pode-se afirmar que $x = 3$ é assíntota vertical de $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$.

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3+x^2}}{x}$$

Calculam-se os limites laterais, uma vez que para $x = 0$ o denominador é nulo. O limite lateral à esquerda é obtido substituindo-se x por $(0-h)$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{3+x^2}}{x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3+(0-h)^2}}{0-h} = -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3+h^2}}{h} = -\lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{\frac{3+h^2}{h^2}}.$$

Reescrevendo-se o quociente $\frac{3+h^2}{h^2}$ como $\frac{3}{h^2} + 1$ e aplicando as propriedades operatórias dos limites 1.6.9, 1.6.3 e 1.6.7 tem-se,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{3+x^2}}{x} = -\sqrt{\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{3}{h^2} + 1 \right)} = -\sqrt{3 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} + \lim_{h \rightarrow 0} 1}.$$

Pelo teorema 1.7.1, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} = +\infty$. Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{3+x^2}}{x} = -\infty.$$

Para determinar o limite lateral à direita, substitui-se x por $(0+h)$ e obtém-se,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{3+x^2}}{x} = +\infty.$$

Como

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{3+x^2}}{x} = -\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{3+x^2}}{x} = +\infty. \quad (1.7.4)$$

pode-se afirmar que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3+x^2}}{x}$ não existe.

Pela Definição 1.7.1 e pelo resultado (1.7.4), pode-se afirmar que $x = 0$ é assíntota vertical de $f(x) = \frac{\sqrt{3+x^2}}{x}$.

Exemplo 1.7.4. Para a função $f(x) = \frac{1}{|x-3|}$, calcule $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.

Solução:

$$\text{Note que a função } f(x) \text{ pode ser reescrita como, } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-3}, & \text{se } x > 3 \\ \frac{1}{3-x}, & \text{se } x < 3 \end{cases}.$$

Calculam-se os limites laterais, uma vez que para $x = 3$ o denominador é nulo. O limite lateral à esquerda é obtido substituindo-se x por $(3+h)$ e aplicando-se o Teorema 1.7.1 tem-se,

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(3+h)-3} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} = +\infty.$$

Para determinar o limite lateral à esquerda, substitui-se x por $(3-h)$ e obtém-se,

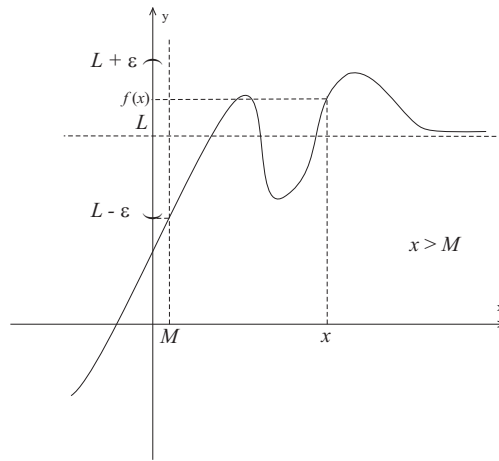
$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{3-x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{3-(3-h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} = +\infty.$$

Pode-se então afirmar que $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$.

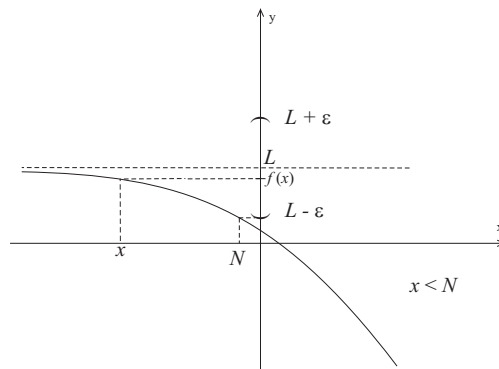
Neste caso, diz-se que a função $f(x)$ não possui **limite finito** quando x tende a 3.

1.8 Limites no infinito

Seja uma função f definida para todo x pertencente a um intervalo aberto infinito, o qual se estende na direção positiva do eixo x , escreve-se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ se dado qualquer $\epsilon > 0$, há um número correspondente $M > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ se $x > M$, como pode ser visto na Figura 1.22.

Figura 1.22: Gráfico de $f(x)$.

Da mesma forma, seja f uma função definida para todo x pertencente a um intervalo aberto infinito, o qual se estende na direção negativa do eixo x , escreve-se $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ se dado qualquer $\epsilon > 0$, há um número correspondente $N < 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ se $x < N$. Veja a representação gráfica na Figura 1.23.

Figura 1.23: Gráfico de $f(x)$.

Definição 1.8.1. A reta horizontal $y = L$ é chamada de **assíntota horizontal** ao gráfico de $f(x)$ se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L.$$

Observação 1.8.1. Basta que apenas um dos limites da Definição 1.8.1 se verifique para que se tenha uma assíntota horizontal.

Observação 1.8.2. O gráfico de uma função $f(x)$ pode ter até duas assíntotas horizontais $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L_2$. Veja na Figura 1.24.

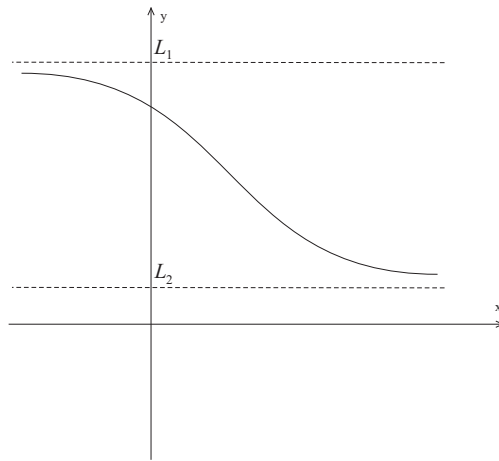


Figura 1.24: Gráfico com duas assíntotas horizontais.

Exemplo 1.8.1. Mostre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Solução:

Deve-se mostrar que para qualquer ϵ , existe $M > 0$ tal que se $x > M$, então $\left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \epsilon$. Escolhendo $M = \frac{1}{\epsilon}$, tem-se que $|x| > M$ e $\left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \epsilon$. Portanto, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$. De acordo com a Definição 1.8.1, pode-se afirmar que $y = 0$ é assíntota horizontal de $f(x)$.

Para valores inteiros positivos de n , o comportamento da função $f(x) = \frac{1}{x^n}$ no infinito é caracterizado no Teorema 1.8.1.

Teorema 1.8.1. (Comportamento da função $f(x) = \frac{1}{x^n}$ no infinito) Se n é um número inteiro positivo, então $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$.

Exemplo 1.8.2. Calcule os limites:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+2}}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x-2}}$

Solução:

- Para resolver $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1}$, aplica-se uma mudança de variável, considera-se $u = x + 1$. Quando x tende a infinito, a variável u também tende a infinito. Logo,

o novo limite pode ser escrito como $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{u}$. Pelo Teorema 1.8.1, $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{u} = 0$.

Portanto, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$.

b) A solução de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+2}}$ segue as mesmas etapas do item anterior. Aplica-se uma mudança de variável, considera-se $u = \sqrt{x+2}$. Quando x tende a infinito, a variável u também tende a infinito. Logo, o novo limite pode ser escrito como $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{u}$. Pelo Teorema 1.8.1, $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{u} = 0$. Portanto, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+2}} = 0$.

c) O domínio de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$ corresponde ao conjunto $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x > 2\}$, portanto o cálculo do limite não faz sentido.

Exemplo 1.8.3. O preço de um certo aparelho eletrônico sofre uma desvalorização ao longo do tempo t de acordo com a função $p(t) = 40 + \frac{40}{2+t}$ unidades monetárias. O que acontecerá com o preço desse aparelho quando o tempo crescer indefinidamente?

Solução:

Para avaliar o preço do aparelho quando o tempo cresce indefinidamente, deve-se calcular o limite da função $p(t)$ quando x tende para mais infinito, ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} p(t) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(40 + \frac{40}{2+t} \right).$$

Aplicando-se as propriedades do limite da soma 1.6.3 e do quociente 1.6.6 tem-se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} p(t) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 40 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{40}{2+t} = 40.$$

Isto significa que a medida que o tempo passa o preço do aparelho eletrônico sofre uma desvalorização até atingir o preço de 40 unidades monetárias.

1.8.1 Limites no infinito de x^n

A função $f(x) = x^n$ tem os seguintes limites no infinito:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$, para qualquer $n > 0$.

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & \text{se } n \in \{2, 4, 6, 8, \dots\} \\ -\infty, & \text{se } n \in \{1, 3, 5, 7, \dots\} \end{cases}$.

Observação 1.8.3. Um polinômio se comporta como o seu termo de maior grau quando $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$.

Exemplo 1.8.4. Calcule:

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (8x^2 + 3x)$
 b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (7x^5 - 6x^4)$.

Solução:

- a) Para calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} (8x^2 + 3x)$ deve-se lembrar que um polinômio se comporta como o seu termo de maior grau quando $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$. Portanto, neste caso, o comportamento do polinômio $8x^2 + 3x$ é definido pelo termo $8x^2$ quando x tende para $+\infty$. Isto implica que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (8x^2 + 3x) = +\infty.$$

- b) Para determinar $\lim_{x \rightarrow -\infty} (7x^5 - 6x^4)$ deve-se proceder da mesma forma do item a). Portanto, neste caso, o comportamento do polinômio $7x^5 - 6x^4$ é definido pelo termo $7x^5$ quando x tende para $-\infty$. Isto implica que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (7x^5 - 6x^4) = -\infty.$$

Exercício 1.8.1. Calcule os limites:

- | | |
|---|--|
| a) $\lim_{x \rightarrow 3} (5x - 2)$ | g) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x}{x + 1}$ |
| b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{x - 1}$ | h) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x^2 - 4}$ |
| c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x}{2x - 4}$ | i) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 6x + 7}{x^2 - 3x + 2}$ |
| d) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 3x}{x^2 - x + 3}$ | j) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x}{x - 5}$ |
| e) $\lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{4x}{x + 3} + \frac{12}{x + 3} \right)$ | k) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 1)(x - 2)}{x + 2}$ |
| f) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 + x^2 - 2}{x^2 + 2}$ | l) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e}{3x - 4}$ |

Resposta do exercício

1.8.1.

- a) 13 b) -5 c) Não existe. d) 2
e) 4 f) 3 g) $\frac{3}{4}$ h) Não existe.
i) $\frac{7}{3}$ j) Não existe. k) 0 l) $\frac{e}{2}$

1.9 Limites especiais

Determina-se o comportamento de uma função f de variável real nas proximidades de determinado valor da variável, calculando-se o limite de f através da aplicação das propriedades para o cálculo de limites. Em certos casos, obtêm-se expressões que não têm um significado conhecido. Observe os limites abaixo:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$
b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{4x} = 0$
c) $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{1/x})^x = e$
d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2^x)^{2/x} = 4$
e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$
f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x} = 2$
g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - x) = 0$
h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x - (x + 1)] = -1.$

Os exemplos anteriores ilustram situações onde não é possível atribuir de imediato o valor do limite, caso ele exista. Nos itens a) - d), pode-se observar o quociente de duas quantidades variáveis que tendem a zero, chamadas infinitésimos.

Nos itens de e) - h) estão representadas outras relações: infinitamente grandes com quantidades infinitamente grandes (representadas por ∞).

Tais expressões recebem o nome de **indeterminações**. Nestes casos, diz-se que se deve levantar estas indeterminações. Este processo consiste, basicamente, em redefinir o próprio limite com o objetivo de eliminar pelo menos um infinitésimo ou um infinitamente grande.

São indeterminações as substituições obtidas no cálculo de limites que resultam em $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$ ou nas potências 1^∞ , 0^0 , ∞^0 .

1.9.1 Indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$

Função racional

Em um limite de uma função racional do tipo $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)}$, quando o denominador e o numerador forem ambos nulos em $x = a$, fatoram-se o numerador e o denominador, cancelando seus fatores comuns. Assim, pode-se reduzir a fração à outra, onde o numerador e o denominador não sejam mais ambos nulos em $x = a$. Se isso acontecer, obtém-se o limite por substituição na fração simplificada.

Exemplo 1.9.1. Como é o comportamento da função $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 9}{x - 3}$ quando x se aproxima de 3?

Solução:

Para estudar o comportamento da função $f(x)$ quando x se aproxima de 3, calcula-se

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x - 3}.$$

Fatorando-se o numerador, tem-se

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)^2}{x - 3}.$$

Simplificando e aplicando a propriedade do limite de um polinômio 1.6.10, obtém-se

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x - 3) = 0.$$

Observação 1.9.1. Observa-se que o mesmo resultado pode ser obtido efetuando-se a divisão entre os polinômios $x^2 - 6x + 9$ e $x - 3$.

Exemplo 1.9.2. Calcule os limites:

a) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 36}{x - 6}$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^3 - x^2 - 9x + 9}.$$

Solução:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 36}{x - 6}$$

Observa-se que o grau do polinômio do numerador é maior que o grau do polinômio do denominador, portanto é possível dividir um polinômio pelo outro, obtendo-se

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 36}{x - 6} = \lim_{x \rightarrow 6} (x + 6).$$

Aplicando-se a propriedade do limite de um polinômio 1.6.10, tem-se

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 36}{x - 6} = 12.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^3 - x^2 - 9x + 9}.$$

Observa-se que o grau do polinômio do numerador é menor que o grau do polinômio do denominador, portanto fatora-se o polinômio do denominador, obtendo-se $x^3 - x^2 - 9x + 9 = (x-1)(x^2 - 9)$. Substituindo a expressão fatorada no limite original, resulta

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^3 - x^2 - 9x + 9} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x^2 - 9)}.$$

Assim,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^3 - x^2 - 9x + 9} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2 - 9}.$$

Usando a propriedade do limite do quociente 1.6.6,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^3 - x^2 - 9x + 9} = -\frac{1}{8}.$$

Exemplo 1.9.3. Seja $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}, & \text{se } x < 2 \\ \frac{2x^3 - 3x^2 - 8x + 12}{x^2 - 4}, & \text{se } x > 2 \end{cases}$, calcule $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

Solução:

O limite $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ existe se $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$.

O cálculo de $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ utiliza a expressão que define $f(x)$ para $x < 2$, isto é, $\frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$. Escreve-se

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}.$$

Fatora-se o numerador, obtendo-se $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$.

Substituindo no limite:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 3)}{x - 2}.$$

Cancelando os fatores comuns, chega-se a

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 3).$$

Calcula-se o último limite aplicando a propriedade do limite de uma função polinomial 1.6.10 e obtém-se:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 3) = 5.$$

O cálculo de $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ utiliza a expressão que define $f(x)$ para $x > 2$, isto é, $\frac{2x^3 - 3x^2 - 8x + 12}{x^2 - 4}$. Escreve-se

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 - 3x^2 - 8x + 12}{x^2 - 4}.$$

Fatoram-se os polinômios do numerador e do denominador, obtendo-se, respectivamente:

$$2x^3 - 3x^2 - 8x + 12 = (x - 2)(x + 2)(2x - 3)$$

e

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2).$$

Substituindo no limite:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)(2x - 3)}{(x - 2)(x + 2)}.$$

Cancelando os fatores comuns, chega-se a

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (2x - 3).$$

Calcula-se o último limite aplicando a propriedade do limite de uma função polinomial 1.6.10 e obtém-se:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (2x - 3) = 1.$$

Como $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, conclui-se que não existe $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

Função irracional

Em uma função algébrica irracional, uma maneira de determinar o limite de uma função para qual a substituição direta leva a uma forma $\frac{0}{0}$ é usar a técnica de racionalização. Essa técnica pode ser usada para racionalizar o denominador ou o numerador. Outra forma alternativa consiste em realizar mudanças de variáveis adequadas que eliminem os termos de expoentes fracionários.

Exemplo 1.9.4. Calcule os limites:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}.$$

Solução:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1}$$

A substituição de x por 0 no limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1}$ leva a uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Como se trata de uma função irracional, neste caso, racionaliza-se, isto é, multiplica-se o numerador e o denominador pelo termo $\sqrt{x+1} + 1$, ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{x+1} + 1)}{(\sqrt{x+1} - 1)(\sqrt{x+1} + 1)}.$$

Multiplicando os fatores do denominador

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{x+1} + 1)}{x + 1 - 1}.$$

Simplificando, o limite resultante fica

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x+1} + 1.$$

Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1} = 2.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

A substituição de x por 1 no limite $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$ leva a uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Neste caso, realiza-se uma mudança de variável de modo a

eliminar os termos com expoente fracionário. Considera-se $x = t^4$. Observa-se que quando x tende a 1, a nova variável t também tende a 1. Escreve-se o novo limite:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{t^4} - 1}{\sqrt{t^4} - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t - 1}{t^2 - 1}.$$

Observa-se que a função obtida neste processo é racional, porém a indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ não foi eliminada. Para continuar o cálculo, fatora-se o denominador, isto é, escreve-se $t^2 - 1 = (t - 1)(t + 1)$ e se substitui no limite, obtendo-se

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t - 1}{t^2 - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t - 1}{(t - 1)(t + 1)}.$$

Simplificando os fatores comuns, chega-se ao limite de um quociente que pode ser resolvido pela propriedade 1.6.6:

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t - 1}{(t - 1)(t + 1)} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{t + 1} = \frac{1}{2}.$$

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{1}{2}.$$

Exercício 1.9.1. Calcule:

- | | |
|---|---|
| a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{x^3 - x}$ | e) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x - 3}}{x^2 - 49}$ |
| b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$ | f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + 1} - \sqrt{1 - x}}{x}$ |
| c) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x - 8}{\sqrt[3]{x} - 2}$ | g) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5 + x}}{1 - \sqrt{5 - x}}$ |
| d) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}, a \neq 0$ | h) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 6x + 5}{x^2 - 3x - 4}$ |

Resposta do exercício

1.9.1.

- | | | | |
|--------------------|------------------|-------------------|-------------------|
| a) 1 | b) $\frac{3}{2}$ | c) 12 | d) $4a\sqrt{a}$ |
| e) $-\frac{1}{56}$ | f) 1 | g) $-\frac{1}{3}$ | h) $-\frac{4}{5}$ |

1.9.2 Indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$

Se $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$, divide-se o numerador e o denominador pela maior potência de x que aparece no denominador.

Exemplo 1.9.5. Determine o valor dos seguintes limites:

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-3}$
 b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^6 - 5x^2 + 9}{2x^4 + 1}$
 c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 5}{6x^3 - 7}$
 d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \sqrt{x^2 + 9}}{2x + \sqrt{4x^2 + 9}}$.

Solução:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-3}$

Este limite resulta na forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$. Com o objetivo de levantar a indeterminação, divide-se o numerador e o denominador pela maior potência de x do denominador (neste caso, x). Assim,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{x}}{\frac{x-3}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \frac{3}{x}}.$$

Aplicando as propriedades do limite do quociente 1.6.6 e do limite da diferença 1.6.4, obtém-se:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-3} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \frac{3}{x}}} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{3}{x}}.$$

O Teorema 1.8.1 permite escrever que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0$.

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-3} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \frac{3}{x}}} = 1.$$

b)
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^6 - 5x^2 + 9}{2x^4 + 1}$$

A tentativa de cálculo deste limite resulta na forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$. Com o objetivo de levantar a indeterminação, divide-se o numerador e o denominador pela maior potência de x do denominador (neste caso, x^4). Assim,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^6 - 5x^2 + 9}{2x^4 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3x^6 - 5x^2 + 9}{x^4}}{\frac{2x^4 + 1}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - \frac{5}{x^2} + \frac{9}{x^4}}{2 + \frac{1}{x^4}}.$$

Aplicando as propriedades do limite do quociente 1.6.6, do limite da diferença 1.6.4 e do limite da soma 1.6.3, obtém-se:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^6 - 5x^2 + 9}{2x^4 + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x^2} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9}{x^4}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^4}}.$$

O teorema 1.8.1 permite escrever que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x^2} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9}{x^4} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^4} = 0.$$

$$\text{Portanto, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^6 - 5x^2 + 9}{2x^4 + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2}{2} = +\infty.$$

c)
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 5}{6x^3 - 7}$$

O cálculo deste limite resulta na forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$. Com o objetivo de levantar a indeterminação, divide-se o numerador e o denominador pela maior potência de x do denominador (neste caso, x^3). Assim,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 5}{6x^3 - 7} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3x + 5}{x^3}}{\frac{6x^3 - 7}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3x}{x^3} + \frac{5}{x^3}}{\frac{6x^3}{x^3} - \frac{7}{x^3}}.$$

Simplificando

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 5}{6x^3 - 7} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3}{x^2} + \frac{5}{x^3}}{6 - \frac{7}{x^3}}.$$

Aplicando as propriedades do limite do quociente 1.6.6, do limite da diferença 1.6.4 e do limite da soma 1.6.3, obtém-se:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 5}{6x^3 - 7} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x^2} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x^3}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} 6 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7}{x^3}}.$$

O Teorema 1.8.1 permite escrever que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x^2} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x^3} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7}{x^3} = 0.$$

$$\text{Portanto, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 5}{6x^3 - 7} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 0}{6} = 0.$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \sqrt{x^2 + 9}}{2x + \sqrt{4x^2 + 9}}.$$

Este limite resulta na forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$. Com o objetivo de levantar a indeterminação, divide-se o numerador e o denominador pela maior potência de x do denominador (neste caso, x). Assim,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \sqrt{x^2 + 9}}{2x + \sqrt{4x^2 + 9}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3x + \sqrt{x^2 + 9}}{x}}{\frac{2x + \sqrt{4x^2 + 9}}{x}}.$$

Efetuada as operações de divisão, escreve-se:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \sqrt{x^2 + 9}}{2x + \sqrt{4x^2 + 9}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3x}{x} + \sqrt{\frac{x^2 + 9}{x^2}}}{\frac{2x}{x} + \sqrt{\frac{4x^2 + 9}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \sqrt{1 + \frac{9}{x^2}}}{2 + \sqrt{4 + \frac{9}{x^2}}}.$$

Aplicando as propriedades do limite do quociente 1.6.6 e do limite da soma 1.6.3, obtém-se:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \sqrt{x^2 + 9}}{2x + \sqrt{4x^2 + 9}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 + \sqrt{1 + \frac{9}{x^2}}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \sqrt{4 + \frac{9}{x^2}}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{9}{x^2}}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4 + \frac{9}{x^2}}}.$$

Utilizando a propriedade do limite da radiciação 1.6.9, pode-se escrever

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \sqrt{x^2 + 9}}{2x + \sqrt{4x^2 + 9}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 + \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9}{x^2}}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} 4 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9}{x^2}}}.$$

O Teorema 1.8.1 permite escrever que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9}{x^2} = 0$.

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \sqrt{x^2 + 9}}{2x + \sqrt{4x^2 + 9}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 + \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} 4}} = 1.$$

1.9.3 Indeterminação do tipo $\infty - \infty$

Para resolver limites do tipo $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \infty - \infty$, utilizam-se artifícios algébricos para se obter indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

Exemplo 1.9.6. Resolva os limites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x(\sqrt{x^2 + 1} - x)]$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{3x^2 + x} - 2x)$

Solução:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x(\sqrt{x^2 + 1} - x)]$

Com o intuito de eliminar a indeterminação do tipo $\infty - \infty$, multiplica-se e divide-se a função original pelo seu conjugado, assim:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [x(\sqrt{x^2 + 1} - x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x(\sqrt{x^2 + 1} - x)] \cdot \frac{[\sqrt{x^2 + 1} + x]}{[\sqrt{x^2 + 1} + x]}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [x(\sqrt{x^2 + 1} - x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x^2 + 1 - x^2)}{x(\sqrt{x^2 + 1} + x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x(\sqrt{x^2 + 1} + x)}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [x(\sqrt{x^2 + 1} - x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\sqrt{x^2 + 1} + x)}.$$

Portanto, $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x(\sqrt{x^2 + 1} - x)] = \frac{1}{2}$.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{3x^2 + x} - 2x)$

Com o intuito de eliminar a indeterminação do tipo $\infty - \infty$, multiplica-se e divide-se a função original pelo seu conjugado, assim:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{3x^2 + x} - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{3x^2 + x} - 2x) \cdot \frac{\sqrt{3x^2 + x} + 2x}{\sqrt{3x^2 + x} + 2x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{3x^2 + x} - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 + x}{\sqrt{3x^2 + x} + 2x}.$$

A fração resultante consiste de uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Neste caso, divide-se o numerador e o denominador pela maior potência de x no denominador:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{3x^2 + x} - 2x) = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 + x}{x}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3x^2 + x} + 2x}{x}} = \frac{1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} x}{2 + \sqrt{3 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}}} = -\infty.$$

$$\text{Logo, } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{3x^2 + x} - 2x) = -\infty.$$

1.9.4 Indeterminação tipo $0 \cdot \infty$

Se $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = 0 \cdot \infty$, transforma-se o limite para que resulte em indeterminação $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, através de artifícios algébricos.

Os limites $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{x} \cdot \ln(1 + x) \right]$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{x} \cdot (e^{2x} - e^x) \right]$ exemplificam esta indeterminação. O estudo dos limites fundamentais exponenciais serão importantes para a obtenção dos resultados destes exemplos.

Exercício 1.9.2. Calcule os limites:

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x+1}{2x-5}$ l) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x+1}}$
- b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x+4}$ m) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+3} - \sqrt{x})$
- c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2+7}{3x^2}$ n) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{16x+3}}$
- d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{3x^4+x}}{x^2-8}$ o) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3-x^2+7x-3}{2-x+5x^2-4x^3}$
- e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2-10x+1)$ p) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-4x}{x-5}$
- f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3-x^2+x-1}{x^4+x^3-x+1}$ q) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2-1}-x)$
- g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ex^2-2x+3}{2x^2+5x-3}$ r) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+3} - \sqrt{x^2-5})$
- h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x^2}$ s) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{3x^3+2x+1} - \sqrt{2x})$
- i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{100}{x}\right)$ t) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x\sqrt{1+x}}\right)$
- j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3+3x}{x^2+5}$ u) $\lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{1}{x^2-4x+4} - \frac{x}{x^3-3x^2+4}\right]$
- k) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x-8}{\sqrt{x^2+1}}$

Resposta do exercício

1.9.2.

- | | | | |
|-------------------|------------------|-------------------|------------------|
| a) $\frac{5}{2}$ | b) 0 | c) $\frac{5}{3}$ | d) $\sqrt{3}$ |
| e) $+\infty$ | f) 0 | g) $\frac{e}{2}$ | h) 0 |
| i) 2 | j) $+\infty$ | k) 7 | l) $+\infty$ |
| m) 0 | n) $\frac{1}{4}$ | o) $-\frac{1}{2}$ | p) $+\infty$ |
| q) $-\frac{1}{2}$ | r) 0 | s) $+\infty$ | t) $\frac{1}{2}$ |
| u) $+\infty$. | | | |

1.10 Teorema do confronto

Teorema 1.10.1. Suponha que $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ para qualquer x em um dado intervalo aberto contendo a , exceto possivelmente quando $x = a$. Suponha também que $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$, então $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

Veja os gráficos de $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ na Figura 1.25.

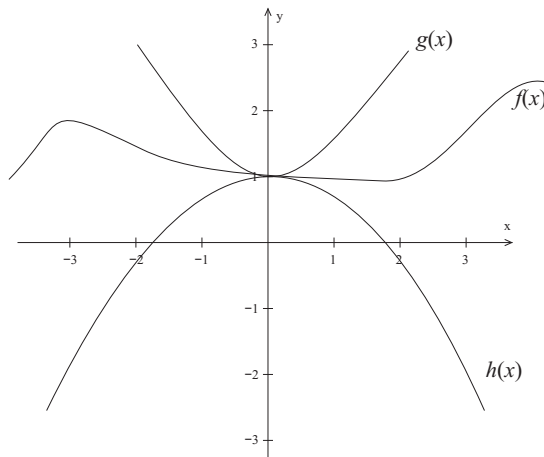


Figura 1.25: Gráficos de $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$.

Demonstração:

Para $\epsilon > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que $|h(x) - L| < \epsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta_1$ e $|g(x) - L| < \epsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta_2$.

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, então se $0 < |x - a| < \delta$, tem-se que $|h(x) - L| < \epsilon$ e $|g(x) - L| < \epsilon$ o que implica que $-\epsilon < h(x) - L < \epsilon$ e $L - \epsilon < h(x)$, e ainda $-\epsilon < g(x) - L < \epsilon$ e $g(x) < L + \epsilon$.

Por outro lado, como $h(x) < f(x) < g(x)$, tem-se $L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$, isto é, $|f(x) - L| < \epsilon$.

Portanto, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

Exemplo 1.10.1. Utilize o Teorema do Confronto para determinar $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, sabendo que $4 - x^2 \leq f(x) \leq 4 + x^2$.

Solução:

Neste caso, pelo Teorema 1.10.1, considera-se que $h(x) = 4 - x^2$ e $g(x) = 4 + x^2$.

Pode-se escrever: $\lim_{x \rightarrow 0} 4 - x^2 \leq \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0} 4 + x^2$.

Isto é, $4 \leq \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \leq 4$.

Portanto, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 4$.

Exercício 1.10.1. Mostre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 0$, utilizando o Teorema do Confronto.

1.11 Limite de funções transcendentas

Nesta seção, estudam-se os limites das funções transcendentas, isto é, funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas.

A unidade de medida de ângulo considerada para as funções trigonométricas é radianos.

1.11.1 Função seno

Teorema 1.11.1. $\lim_{x \rightarrow a} \text{sen}(x) = \text{sen}(a), \forall a \in \mathbb{R}$.

Demonstração:

Note que $\lim_{x \rightarrow a} \text{sen}(x) = \text{sen}(a)$ se e somente se $\lim_{x \rightarrow a} (\text{sen}(x) - \text{sen}(a)) = 0$, portanto para demonstrar o teorema, basta provar que $\lim_{x \rightarrow a} (\text{sen}(x) - \text{sen}(a)) = 0$.

Da Trigonometria tem-se que

$$0 \leq |\text{sen}(x) - \text{sen}(a)| = \left| 2 \text{sen} \left(\frac{x-a}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{x+a}{2} \right) \right| = \left| 2 \text{sen} \left(\frac{x-a}{2} \right) \right| \cdot \left| \cos \left(\frac{x+a}{2} \right) \right|,$$

mas

$$\left| \text{sen} \left(\frac{x-a}{2} \right) \right| \leq \left| \frac{x-a}{2} \right| \text{ e } \left| 2 \cos \left(\frac{x+a}{2} \right) \right| \leq 2.$$

Então,

$$0 \leq |\text{sen}(x) - \text{sen}(a)| \leq 2 \left| \frac{x-a}{2} \right| \implies 0 \leq |\text{sen}(x) - \text{sen}(a)| \leq |x-a|.$$

Sejam as funções $g(x) = 0$, $f(x) = |\text{sen}(x) - \text{sen}(a)|$ e $h(x) = |x-a|$.

Note que

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} |x-a| = 0.$$

Segue pelo Teorema do Confronto que $\lim_{x \rightarrow a} |\text{sen}(x) - \text{sen}(a)| = 0$ e, portanto, $\lim_{x \rightarrow a} \text{sen}(x) - \text{sen}(a) = 0$, ou seja, $\lim_{x \rightarrow a} \text{sen}(x) = \text{sen}(a)$.

Exemplo 1.11.1. Seja $f(x) = \text{sen}(x)$. Estude o comportamento de $f(x)$ quando x aproxima-se de zero.

Solução:

Pelo Teorema 1.11.1 tem-se que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \text{sen}(x) = \text{sen}(0) = 0.$$

Note que este resultado pode ser facilmente confirmado graficamente. Observe o gráfico da função $f(x) = \text{sen}(x)$ na Figura 1.28.

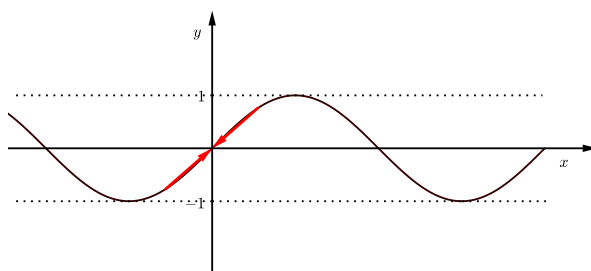


Figura 1.26: Representação do comportamento de $f(x) = \text{sen}(x)$ para $x \rightarrow 0$.

1.11.2 Função cosseno

Teorema 1.11.2. $\lim_{x \rightarrow a} \cos(x) = \cos(a), \forall a \in \mathbb{R}$.

Demonstração:

A demonstração deste teorema é feita de modo análogo a do anterior, usando o fato de que $\cos(x) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

Exemplo 1.11.2. Seja $f(x) = \cos(x)$. Estude o comportamento de $f(x)$ quando x aproxima-se de π .

Solução:

Pelo Teorema 1.11.2, tem-se que

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \cos(x) = \cos(\pi) = -1.$$

Note que este resultado pode ser facilmente confirmado graficamente. Observe o gráfico da função $f(x) = \cos(x)$ na Figura 1.28.

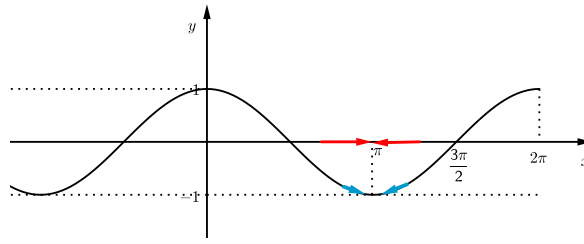


Figura 1.27: Representação do comportamento de $f(x) = \cos(x)$ para $x \rightarrow \pi$.

1.11.3 Função tangente

Teorema 1.11.3. $\lim_{x \rightarrow a} \operatorname{tg}(x) = \operatorname{tg}(a), \forall a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Demonstração:

Da Trigonometria tem-se que $\operatorname{tg}(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{cos}(x)}$. Aplicando-se a propriedade operatória dos limites 1.6.6 e os teoremas 1.11.1 e 1.11.2 tem-se,

$$\lim_{x \rightarrow a} \operatorname{tg}(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{cos}(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} \operatorname{sen}(x)}{\lim_{x \rightarrow a} \operatorname{cos}(x)} = \frac{\operatorname{sen}(a)}{\operatorname{cos}(a)} = \operatorname{tg}(a).$$

Exemplo 1.11.3. Calcule $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}(\pi - x)$.

Solução:

Note que quando x aproxima-se de $\frac{\pi}{2}$, $\pi - x$ tende para $\frac{\pi}{2}$. Portanto o teorema 1.11.3 não pode ser aplicado, uma vez que a tangente de $\frac{\pi}{2}$ não está definida. Neste caso, utiliza-se a representação gráfica da função.

Observa-se que quando x tende para $\frac{\pi}{2}$ à direita, ou seja, por valores maiores que $\frac{\pi}{2}$, a função $\operatorname{tg}(x)$ tende para $-\infty$. Por outro lado, quando x tende para $\frac{\pi}{2}$ à esquerda, ou seja, por valores menores que $\frac{\pi}{2}$, a função $\operatorname{tg}(x)$ tende para $+\infty$. Observe a Figura 1.28.

Portanto, não existe $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}(\pi - x)$.

Exemplo 1.11.4. Resolva o limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} [\operatorname{cosec}(x) - \operatorname{cotg}(x)].$$

Solução:

A substituição de x por 0 leva a uma indeterminação do tipo $\infty - \infty$. Neste caso, para levantar a indeterminação, escrevem-se as funções trigonométricas em termos de senos e cossenos. Multiplica-se o numerador e o denominador da

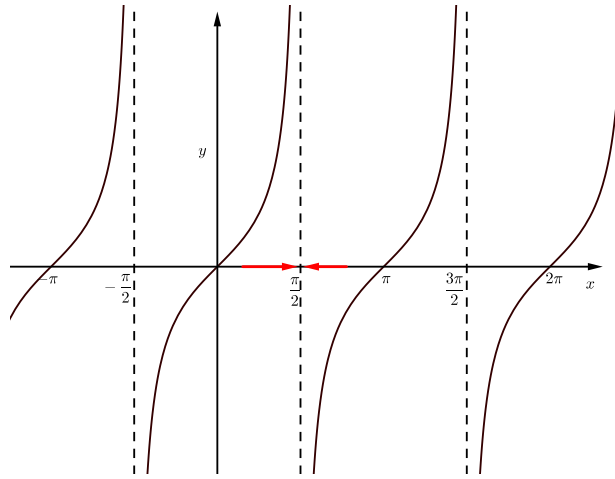


Figura 1.28: Representação do comportamento de $f(x) = \text{tg}(x)$ para $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$.

fração resultante pelo conjugado do numerador, obtendo-se:

$$\lim_{x \rightarrow 0} [\text{cosec}(x) - \text{cotg}(x)] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\text{sen}(x)} - \frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1 - \cos(x)}{\text{sen}(x)} \cdot \frac{1 + \cos(x)}{1 + \cos(x)} \right].$$

A multiplicação dos numeradores, a aplicação da identidade trigonométrica fundamental e dos Teoremas 1.11.1 e 1.11.2 produz:

$$\lim_{x \rightarrow 0} [\text{cosec}(x) - \text{cotg}(x)] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{[1 + \cos(x)]} = 0.$$

Portanto, $\lim_{x \rightarrow 0} [\text{cosec}(x) - \text{cotg}(x)] = 0$.

Exemplo 1.11.5. Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} [\text{sen}(x) \cdot \text{cosec}(x)]$.

Solução:

O limite dado da forma como está escrito corresponde a uma indeterminação do tipo $0 \cdot \infty$. Para eliminar esta indeterminação, basta escrever a função cossecante em termos da função seno:

$$\lim_{x \rightarrow 0} [\text{sen}(x) \cdot \text{cosec}(x)] = \lim_{x \rightarrow 0} \text{sen}(x) \cdot \frac{1}{\text{sen}(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1.$$

Portanto, $\lim_{x \rightarrow 0} [\text{sen}(x) \cdot \text{cosec}(x)] = 1$.

1.11.4 Função exponencial

Teorema 1.11.4. Se $a \in \mathbb{R}$ e $0 < a \neq 1$, então $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$.

Demonstração:

Para $a > 1$ e $0 < \epsilon < 1$ tem-se que como

$$|a^x - 1| < \epsilon,$$

então,

$$-\epsilon < a^x - 1 < \epsilon.$$

Somando-se uma unidade à desigualdade obtém-se

$$1 - \epsilon < a^x < 1 + \epsilon.$$

Aplicando-se a função logarítmica de base a à desigualdade tem-se

$$\log_a(1 - \epsilon) < x < \log_a(1 + \epsilon).$$

Mas, se $a > 1$ e $0 < \epsilon < 1$, então $\log_a(1 - \epsilon) < 0$ e $\log_a(1 + \epsilon) > 0$ e, portanto,

$$\log_a(1 - \epsilon) < x < \log_a(1 + \epsilon). \quad (1.11.1)$$

A desigualdade (1.11.1) implica que

$$x < \log_a(1 + \epsilon) \text{ e } -x < -\log_a(1 - \epsilon),$$

ou seja,

$$|x| < \log_a(1 + \epsilon) \text{ e } |x| < \log_a(1 + \epsilon).$$

Assim, para todo $0 < \epsilon < 1$, existe $\delta = \min\{\log_a(1 + \epsilon), -\log_a(1 - \epsilon)\}$, tal que $0 < |x| < \delta$ e $|a^x - 1| < \epsilon$.

Se $a > 1$ e $\epsilon \geq 1$, tome $\epsilon' < 1 \leq \epsilon$. Então existe $\delta' = \min\{\log_a(1 + \epsilon'), -\log_a(1 - \epsilon')\}$, tal que $0 < |x| < \delta'$ e $|a^x - 1| < \epsilon' < \epsilon$.

De forma análoga, obtém-se o resultado para $0 < a < 1$.

Teorema 1.11.5. Se $a \in \mathbb{R}$ e $0 < a \neq 1$, então $\lim_{x \rightarrow b} a^x = a^b$.

Demonstração:

Para demonstrar este Teorema, basta provar que $\lim_{x \rightarrow b} (a^x - a^b) = 0$. Prova-se inicialmente que $\lim_{x \rightarrow b} a^{x-b} = 1$, isto é,

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tal que } 0 < |x - b| < \delta \text{ implica que } |a^{x-b} - 1| < \epsilon.$$

Tomado-se $x - b = w$ tem-se pelo Teorema 1.11.4 que,

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tal que } 0 < |w| < \delta \text{ implica que } |a^w - 1| < \epsilon.$$

Basta provar que $\lim_{x \rightarrow b} (a^x - a^b) = 0$. De fato,

$$\lim_{x \rightarrow b} (a^x - a^b) = \lim_{x \rightarrow b} [a^b(a^{x-b} - 1)] = a^b \lim_{x \rightarrow b} (a^{x-b} - 1) = a^b[1 - 1] = 0.$$

Teorema 1.11.6. Se $a \in \mathbb{R}$ e $a > 1$, então $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$.

Demonstração:

Primeiramente demonstrar-se-á que se $a \in \mathbb{R}$ e $a > 1$, então $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$.

Note que para todo $M > 0$, $a^x > M$ implica que $x > \log_a M$. Se $M > 1$, tomando-se $N = \log_a M > 0$ tem-se que para todo $M > 1$, existe $N = \log_a M > 0$ tal que $x > N$ implica que $a^x > M$.

Se $0 < M < 1$, tomando-se $M' > 1 > M$, $N = \log_a M' > 0$ tem-se que para todo $M < 1$, existe $N = \log_a M' > 0$ tal que $x > N$ implica que $a^x > M$.

Portanto, tem-se que $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$.

Para provar que se $a \in \mathbb{R}$ e $a > 1$, então $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$, note que $|a^x| < \epsilon$ implica que $a^x < \epsilon$ e portanto $x < \log_a \epsilon$.

Se $0 < \epsilon < 1$, toma-se $N = \log_a \epsilon < 0$ tal que se $x < N$, $|a^x| < \epsilon$.

Se $\epsilon > 1$, toma-se $\epsilon' < 1 < \epsilon$ e $N = \log_a \epsilon' < 0$. Seque que, para todo $\epsilon > 1$, existe $N = \log_a \epsilon' < 0$ tal que se $x < N$, $|a^x| < \epsilon' < \epsilon$.

Portanto tem-se que $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$.

Teorema 1.11.7. Se $a \in \mathbb{R}$ e $0 < a < 1$, então $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$.

Demonstração:

A demonstração deste Teorema fica a cargo do leitor.

Exemplo 1.11.6. Estude o comportamento da função exponencial $f(x) = e^x$ quando

- x tende a zero.
- x tende a $+\infty$.
- x tende a $-\infty$.

Solução:

- Pelo Teorema 1.11.4, tem-se que $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$.

- b) Aplicando-se o resultado do Teorema 1.11.6 verifica-se que a função exponencial $f(x) = e^x$ tende para $+\infty$ quando $x \rightarrow +\infty$, ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty.$$

- c) Pelo Teorema 1.11.6 tem-se que a função exponencial $f(x) = e^x$ aproxima-se de zero quando $x \rightarrow -\infty$, isto é,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

O comportamento da função $f(x) = e^x$ pode ser verificado graficamente na Figura 1.29.

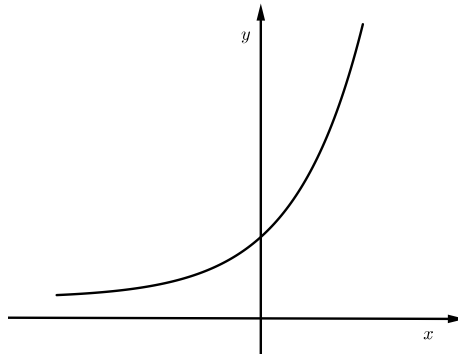


Figura 1.29: Representação do comportamento de $f(x) = e^x$.

Exemplo 1.11.7. Estude o comportamento da função exponencial $f(x) = e^{-x}$ quando

- x tende a $+\infty$.
- x tende a $-\infty$.

Solução:

Note que a função exponencial $g(x) = e^{-x}$ pode ser reescrita como $g(x) = \left(\frac{1}{e}\right)^x$, logo $g(x)$ é uma função exponencial com o valor da base entre 0 e 1.

- Aplicando-se o Teorema 1.11.7, verifica-se que a função exponencial $g(x) = e^{-x}$ aproxima-se de 0 quando $x \rightarrow +\infty$, ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0.$$

b) Pelo Teorema 1.11.7, tem-se que a função exponencial $g(x) = e^{-x}$ tende para $+\infty$ quando $x \rightarrow -\infty$, isto é,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty.$$

O comportamento da função $g(x) = e^{-x}$ pode ser verificado graficamente na Figura 1.30.

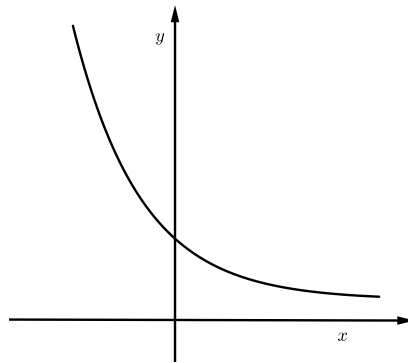


Figura 1.30: Comportamento de $g(x) = e^{-x}$.

Teorema 1.11.8. Se $a \in \mathbb{R}$ e $0 < a \neq 1$ e $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = 0$, então $\lim_{x \rightarrow b} a^{f(x)} = 1$.

Demonstração:

Seja $a > 1$ e $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = 0$. Dado $\epsilon_1 > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que se $0 < |x - b| < \delta_1$ então $|f(x)| < \log_a(1 + \epsilon_1)$, logo

$$-\log_a(1 + \epsilon_1) < f(x) < \log_a(1 + \epsilon_1).$$

Dado $0 < \epsilon_2 < 1$, existe $\delta_2 > 0$ tal que se $0 < |x - b| < \delta_2$ então $|f(x)| < -\log_a(1 - \epsilon_2)$, logo

$$\log_a(1 - \epsilon_2) < f(x) < -\log_a(1 - \epsilon_2).$$

Note que, para $\epsilon_1 > 0$ e $0 < \epsilon_2 < 1$, tem-se que $\log_a(1 - \epsilon_2) < 0 < \log_a(1 + \epsilon_1)$. Então para todo $\epsilon > 0$ tem-se que,

- 1) Se $0 < \epsilon < 1$, então existe $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ tal que se $0 < |x - b| < \delta$ então $\log_a(1 - \epsilon) < f(x) < \log_a(1 + \epsilon)$, logo $1 - \epsilon < a^{f(x)} < 1 + \epsilon$ o que implica que $|a^{f(x)} - 1| < \epsilon$.

2) Se $\epsilon > 1$, tomando-se $0 < \epsilon' < 1 < \epsilon$ existe $\delta' > 0$ tal que se $0 < |x - b| < \delta$ então $|a^{f(x)} - 1| < \epsilon' < \epsilon$. Logo, $\lim_{x \rightarrow b} a^{f(x)} = 1$ para $a > 1$.

A demonstração para $0 < a < 1$ é feita de modo análogo.

Teorema 1.11.9. Se $a \in \mathbb{R}$ e $0 < a \neq 1$ e $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = c$, então

$$\lim_{x \rightarrow b} a^{f(x)} = a^{\lim_{x \rightarrow b} f(x)} = a^c.$$

Demonstração:

Por hipótese, tem-se que $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = c$, isto é, $\lim_{x \rightarrow b} [f(x) - c] = 0$.

Pelo Teorema 1.11.8,

$$\lim_{x \rightarrow b} [f(x) - c] = 0$$

que implica que $\lim_{x \rightarrow b} a^{[f(x) - c]} = 1$.

Demonstra-se que $\lim_{x \rightarrow b} a^{f(x)} = a^c$, provando-se que $\lim_{x \rightarrow b} [a^{f(x)} - a^c] = 0$.

Assim,

$$\lim_{x \rightarrow b} [a^{f(x)} - a^c] = \lim_{x \rightarrow b} a^c \cdot [a^{f(x) - c} - 1] = a^c \cdot \lim_{x \rightarrow b} [a^{f(x) - c} - 1] = a^c(1 - 1) = 0.$$

Exemplo 1.11.8. Calcule o valor dos limites:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} 2^{x^2 - 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{x+2}{x-1}}$.

Solução:

Aplicando-se o Teorema 1.11.9 na solução dos itens a) e b) obtém-se,

a) $\lim_{x \rightarrow 3} 2^{x^2 - 1} = 2^{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 1} = 2^8 = 256$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{x+2}{x-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2}{x-1}} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$.

Exemplo 1.11.9. As vendas cumulativas V (em milhares de unidades) de um novo produto \mathbf{X} após sua permanência no mercado por t anos é modelada por

$$V(t) = 30 \cdot e^{\frac{-\ln(6)}{t}}.$$

Sabendo-se que o ponto de saturação do mercado para um produto é obtido calculando-se o limite da função $V(t)$ quando t tende para $+\infty$, determine o ponto de saturação para o produto \mathbf{X} .

Solução:

Note que a função $V(t)$ que representa as vendas cumulativas de um novo produto é uma função exponencial de base e . Tomando-se o limite de V quando t tende para $+\infty$ tem-se,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 30 \cdot e^{-\frac{\ln(6)}{t}}.$$

Aplicando-se a propriedade operatória dos limites 1.6.7 e o Teorema 1.11.9 obtém-se,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V(t) = 30 \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\frac{\ln(6)}{t}} = 30 \cdot e^{\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-\ln(6)}{t}} = 30 \cdot e^{-\ln(6) \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t}} = 30 \cdot e^0 = 30.$$

Portanto o ponto de saturação no mercado para o produto \mathbf{X} é de 30 mil unidades.

1.11.5 Função logarítmica

O limite de funções logarítmicas podem ser calculados utilizando-se a propriedade operatória do limite do logaritmo de uma função 1.6.12.

Exemplo 1.11.10. Resolva o limite

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \ln(x - 3).$$

Solução:

Calcula-se o limite $\lim_{x \rightarrow 3^+} \ln(x - 3)$ aplicando-se a propriedade operatória do limite do logaritmo de uma função,

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \ln(x - 3) = \ln\left\{ \lim_{x \rightarrow 3^+} (x - 3) \right\}.$$

Observa-se que a função $x - 3$ é uma função polinomial, portanto aplica-se a propriedade operatória do limite de uma função polinomial 1.6.10 obtendo-se,

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \ln(x - 3) = \ln\left\{ \lim_{x \rightarrow 3^+} (x - 3) \right\} = -\infty.$$

O comportamento da função $f(x) = \ln(x - 3)$ quando x tende a 3 pela direita, ou seja, por valores maiores que 3, pode ser verificado graficamente na Figura 1.31.

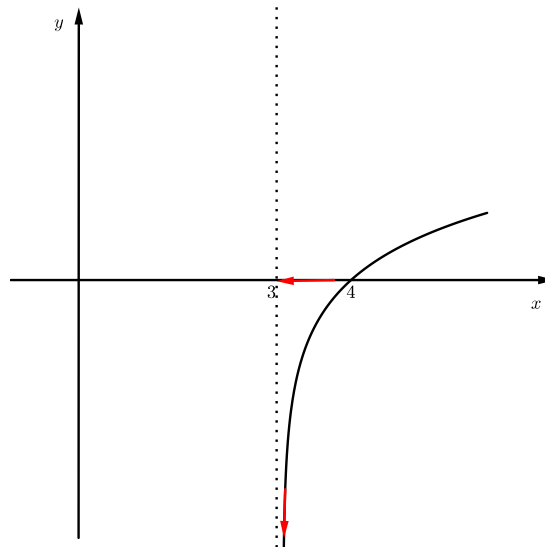


Figura 1.31: Representação do comportamento de $f(x) = \ln(x - 3)$.

1.12 Limites fundamentais

Nesta seção, estudam-se limites importantes que são necessários no cálculo de derivadas de funções elementares pela definição.

1.12.1 Limite fundamental trigonométrico

O limite fundamental trigonométrico relaciona um ângulo com o seu seno nas proximidades de 0 radianos:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(\theta)}{\theta} = 1.$$

Dedução:

Inicialmente esboça-se o primeiro quadrante de um círculo de raio unitário centrado na origem O . Representam-se um ângulo θ e os segmentos correspondentes ao seu seno, seu cosseno e sua tangente, obtendo-se os pontos P , Q , A e T .

Observe na Figura 1.32 que a área do triângulo $\triangle OAP$ é menor que a área do setor OAP , que por sua vez é menor que a área do triângulo $\triangle OAT$. Pode-se expressar essas áreas em termos do ângulo θ da seguinte forma:

$$\text{Área do triângulo } \triangle OAP = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \text{sen}(\theta) = \frac{\text{sen}(\theta)}{2};$$

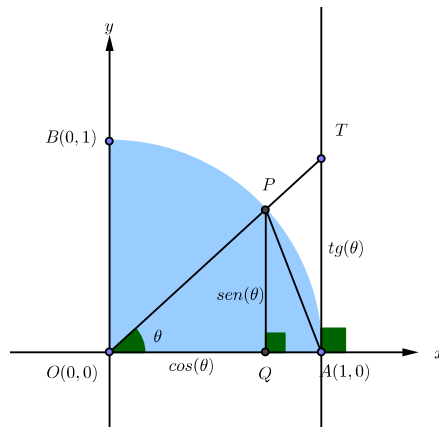


Figura 1.32: Primeiro quadrante do círculo trigonométrico.

$$\text{Área do setor } OAP = \frac{1}{2} \cdot (1)^2 \cdot \theta = \frac{\theta}{2};$$

$$\text{Área do triângulo } \triangle OAT = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \text{tg}(\theta) = \frac{\text{tg}(\theta)}{2}.$$

Logo, pode-se escrever

$$\frac{\text{sen}(\theta)}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{\text{tg}(\theta)}{2}.$$

A desigualdade não se altera ao se dividir os três termos por $\frac{\text{sen}(\theta)}{2}$, que é positivo θ no primeiro quadrante.

$$\text{Assim, tem-se que } 1 < \frac{\theta}{\text{sen}(\theta)} < \frac{1}{\cos(\theta)}.$$

Tomando os recíprocos, a desigualdade é invertida: $1 > \frac{\text{sen}(\theta)}{\theta} > \cos \theta$.

Como $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \cos(\theta) = 1$, pode-se utilizar o Teorema do Confronto 1.10.1 para se obter

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen}(\theta)}{\theta} = 1.$$

Uma vez que $\text{sen}(\theta)$ e θ são funções ímpares, então $f(\theta) = \frac{\text{sen}(\theta)}{\theta}$ é uma função par, isto é, seu gráfico simétrico em relação ao eixo y . Essa simetria implica que o limite à esquerda é igual ao limite à direita, logo,

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen}(\theta)}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen}(\theta)}{\theta} = 1.$$

Portanto, independentemente da variável, pode-se escrever:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1.$$

Exemplo 1.12.1. Utilizando $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1$, calcule os limites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(2x)}{5x}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{sen}(1/x)}{1/x}$

Solução:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x}$

Substituindo x por 0, observa-se que este limite corresponde a uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Multiplica-se o numerador e o denominador pelo conjugado de $\cos(x) - 1$, então:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\cos(x) - 1}{x} \right] \cdot \left[\frac{\cos(x) + 1}{\cos(x) + 1} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2(x) - 1}{x \cdot (1 + \cos(x))}.$$

Da identidade trigonométrica $\cos^2(x) + \text{sen}^2(x) = 1$, pode-se reescrever

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}^2(x)}{x \cdot (1 + \cos(x))} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} \cdot \frac{\text{sen}(x)}{(1 + \cos(x))}.$$

A aplicação do limite fundamental trigonométrico e o cálculo do segundo limite produz

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0.$$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(2x)}{5x}$

Substituindo x por 0, observa-se que este limite corresponde a uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

Neste caso, reescreve-se o limite dado através de uma mudança de variável adequada para obter o limite fundamental trigonométrico.

Sugere-se a mudança de variável $u = 2x$. Quando x tende a 0, u tende a 0 também. O novo limite corresponde a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(2x)}{5x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{2\text{sen}(u)}{5u} = \frac{2}{5} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(u)}{u} = \frac{2}{5}.$$

$$\text{Portanto, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(2x)}{5x} = \frac{2}{5}.$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

Realiza-se a mudança de variável $u = \frac{1}{x}$. Quando $x \rightarrow +\infty$, a variável $u \rightarrow 0$. Reescrevendo o limite dado, chega-se ao limite fundamental na variável u :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(u)}{u} = 1.$$

$$\text{Logo, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1.$$

Exercício 1.12.1. Calcule $\lim_{x \rightarrow \pi} [(x - \pi) \cdot \operatorname{cotg}(x)]$.

Exercício 1.12.2. Mostre que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{sen}(x)} = 1$.

1.12.2 Limite fundamental exponencial I

Este limite define o número de Euler como o valor para o qual se aproxima o termo $(1 + x)^{\frac{1}{x}}$ quando x tende a 0:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Observe o Teorema e suas consequências.

Teorema 1.12.1. Seja a função $f(x) = (1 + x)^{1/x}$ definida em $x \in \mathbb{R}$ tal que $-1 < x$ e $x \neq 0$ então $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e$.

Do Teorema 1.12.1 decorrem os corolários:

Corolário 1.12.1. Seja a função $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ definida em $x \in \mathbb{R}$ tal que $x < -1$ ou $x > 0$ então $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

Corolário 1.12.2. Seja a função $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ definida em $x \in \mathbb{R}$ tal que $x < -1$ ou $x > 0$ então $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

Observação 1.12.1. Formas gerais do limite fundamental exponencial I

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e :$$

a) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + kx)^{\frac{1}{x}} = e^k$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k.$

Exemplo 1.12.2. Calcule os limites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{x}}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} [1 + \text{sen}(x)]^{\frac{1}{\text{sen}(x)}}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 5x)^{\frac{1}{x}}$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{2x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - x^2)^{\frac{1}{x}}$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 10x)}{x}$

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}.$

Solução:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{x}}$

Realiza-se uma mudança de variável a fim de obter uma expressão com a mesma forma do limite fundamental exponencial I. Escreve-se $u = 3x$, quando x tende a 0, u também tende a 0, logo o novo limite é

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{x}} = \left[\lim_{u \rightarrow 0} (1 + u)^{\frac{1}{u}} \right]^3 = e^3.$$

Portanto, $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{x}} = e^3.$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 5x)^{\frac{1}{x}}$

Estabelece-se uma mudança de variável modo a obter uma expressão com a mesma forma do limite fundamental exponencial I. Escreve-se $u = -5x$, quando x tende a 0, u também tende a 0, logo o novo limite é

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 5x)^{\frac{1}{x}} = \left[\lim_{u \rightarrow 0} (1 + u)^{\frac{1}{u}} \right]^{-5} = e^{-5}.$$

Logo, $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 5x)^{\frac{1}{x}} = e^{-5}.$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

De forma análoga aos itens anteriores, realiza-se uma mudança de variável conveniente, isto é, escreve-se $u = -\frac{x}{2}$, quando x tende a 0, u também tende a 0, logo o novo limite é

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \left[\lim_{u \rightarrow 0} (1 + u)^{\frac{1}{u}}\right]^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

$$\text{Assim, } \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 10x)}{x}$

Utilizando as propriedades dos logaritmos, pode-se escrever

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 10x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1 + 10x)^{\frac{1}{x}}.$$

No novo limite aplica-se a propriedade do limite de um logaritmo natural 1.6.12, isto é,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 10x)}{x} = \ln \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 10x)^{\frac{1}{x}}.$$

Aplicando a mudança de variável $u = 10x$, quando x tende a 0, u também tende a 0:

$$\ln \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 10x)^{\frac{1}{x}} = \ln \left[\lim_{u \rightarrow 0} (1 + u)^{\frac{1}{u}}\right]^{10} = \ln(e^{10}) = 10.$$

$$\text{Portanto, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 10x)}{x} = 10.$$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} [1 + \text{sen}(x)]^{\frac{1}{\text{sen}(x)}}$

Neste caso, aplica-se a mudança de variável na função $\text{sen}(x)$, ou seja, $u = \text{sen}(x)$, sabe-se que quando x tende a zero, u terá a mesma tendência, assim, o novo limite é:

$$\lim_{x \rightarrow 0} [1 + \text{sen}(x)]^{\frac{1}{\text{sen}(x)}} = \lim_{u \rightarrow 0} [1 + u]^{\frac{1}{u}} = e.$$

$$\text{Logo, } \lim_{x \rightarrow 0} [1 + \text{sen}(x)]^{\frac{1}{\text{sen}(x)}} = e.$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{2x}$$

Reescreve-se o limite dado de modo que tenha a mesma forma do limite fundamental exponencial I. Faz-se $u = \frac{2}{x}$, quando x tende a infinito, a nova variável u tenderá a zero. Então:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{2x} = \left[\lim_{u \rightarrow 0} (1 + u)^{\frac{1}{u}}\right]^2 = e^2.$$

$$\text{Logo, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{2x} = e^2.$$

$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x}$$

Analogamente ao item anterior, aplica-se a mudança de variável $u = \frac{1}{x}$, quando x tende a infinito, a nova variável u tenderá a zero. Então:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x} = \lim_{u \rightarrow 0} (1 + u)^{\frac{2}{u}} = \left[\lim_{u \rightarrow 0} (1 + u)^{\frac{1}{u}}\right]^2 = e^2.$$

$$\text{Logo, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x} = e^2.$$

$$\text{h) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$$

Para escrever este limite no formato do limite fundamental exponencial I, primeiramente divide-se o numerador pelo denominador, a seguir aplica-se a mudança de variável conveniente $u = -\frac{4}{x+3}$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{4}{x+3}\right)^{x+2} = \lim_{u \rightarrow 0} (1 + u)^{-\frac{4}{u}-1}.$$

Manipula-se o limite e, finalmente, chega-se ao resultado:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2} = \lim_{u \rightarrow 0} (1 + u)^{-\frac{4}{u}} \cdot \lim_{u \rightarrow 0} (1 + u)^{-1} = e^{-4} \cdot 1 = e^{-4}.$$

$$\text{Portanto, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2} = e^{-4}.$$

Observação 1.12.2. O número e é chamado de base exponencial natural, número de Neper ou número de Euler. É um número irracional e tem valor aproximado de 2,7182818284..., obtido através da função $f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ quando os valores

atribuídos a n crescem indefinidamente. Observe o comportamento da função na Tabela 3:

Tabela 3: Valores para a função $f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

n	$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
1	2
10	2,59374246...
100	2,70481383...
1.000	2,71692393...
10.000	2,71814593...
100.000	2,71826824...
1.000.000	2,71828047...

Percebe-se que ao atribuir valores maiores para n a expressão resulta em um valor cada vez mais próximo do número e . Diz-se então que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Modelam-se vários fenômenos de crescimento com funções que envolvem a base exponencial natural. Seu surgimento ocorreu no século XVII com o estudo dos logaritmos feitos por John Napier, e por isso essa constante ficou conhecida como número de Neper. O símbolo e foi criado por Leonhard Euler, a quem é creditada a fórmula $e^{i\pi} + 1 = 0$, considerada por muitos como a mais bela fórmula da história da matemática.

1.12.3 Limite fundamental exponencial II

Utiliza-se o limite fundamental exponencial II para o cálculo da derivada pela definição das funções exponenciais.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{kx} - 1}{kx} = \ln(a), a > 0, a \neq 1.$$

Dedução:

A mudança de variável $t = a^{kx} - 1$ permite escrever $a^{kx} = t + 1$. Aplicando os logaritmos neperianos nos dois membros da igualdade:

$$\begin{aligned}\ln(a^{kx}) &= \ln(t + 1) \\ kx \cdot \ln(a) &= \ln(t + 1) \\ x &= \frac{\ln(t + 1)}{k \cdot \ln(a)}.\end{aligned}$$

Quando $x \rightarrow 0$, tem-se que $t \rightarrow 0$, o que permite reescrever o limite:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{kx} - 1}{kx} &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{t}{k \cdot \frac{\ln(t+1)}{k \cdot \ln(a)}} \right] \\ &= \ln(a) \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\ln(t+1)}{t}} \\ &= \ln(a) \cdot \frac{\lim_{t \rightarrow 0} 1}{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(t+1)}{t}} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{kx} - 1}{kx} &= \ln(a) \cdot \frac{1}{\lim_{t \rightarrow 0} \ln(t+1)^{\frac{1}{t}}}.\end{aligned}$$

Utilizando a propriedade do limite de um logaritmo natural 1.6.12 e o limite fundamental exponencial I 1.12.2:

$$\ln(a) \cdot \frac{1}{\lim_{t \rightarrow 0} \ln(t+1)^{\frac{1}{t}}} = \ln(a) \cdot \frac{1}{\ln \left[\lim_{t \rightarrow 0} (t+1)^{\frac{1}{t}} \right]} = \ln(a) \cdot \frac{1}{\ln(e)} = \ln(a) \cdot \frac{1}{1} = \ln(a).$$

$$\text{Logo, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{kx} - 1}{kx} = \ln(a).$$

Exemplo 1.12.3. Calcule os limites:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3x} - 1}{3x} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{(2-a)x} - 1}{3x} \\ \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{2x} - 1}{2x} & \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}.\end{array}$$

Solução:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3x} - 1}{3x}$$

O limite está escrito na forma do limite fundamental exponencial II (1.12.3), portanto para $a = 2$ e $k = 3$, tem-se

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3x} - 1}{3x} = \ln(2).$$

b)
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{2x} - 1}{2x}$$

Este limite está escrito na forma do limite fundamental exponencial II (1.12.3), portanto para $a = 3$ e $k = 2$, tem-se

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{2x} - 1}{2x} = \ln(3).$$

c)
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{(2-a)x} - 1}{3x}$$

O limite deve ser escrito na forma do limite fundamental exponencial II (1.12.3). Neste caso, multiplica-se o numerador e o denominador da fração por $2 - a$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{(2-a)x} - 1}{3x} = \frac{2-a}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{(2-a)x} - 1}{(2-a)x} = (2-a) \ln(3).$$

d)
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$$

Reescreve-se o limite de maneira a obter dois limites com o mesmo formato do limite fundamental exponencial fundamental II (1.12.3):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{ax} - 1) - (e^{bx} - 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{bx} - 1}{x}.$$

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x} = a \ln(e) - b \ln(e) = a - b.$$

Exercício 1.12.3. Utilizando os limites fundamentais, calcule os limites:

- a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\text{sen}(x+2)}{x^2-4}$ i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\text{sen}(3x)}$
 b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(5x) - 1}{\text{cotg}(5x) \cdot \text{sen}(5x)}$ j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2(x)}{x^2}$
 c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sqrt{x+1}}{\text{sen}(2x)}$ k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2^{\text{tg}(x)}}{\text{tg}(x)}$
 d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3^{x^2-4} - 1}{x-2}$ l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right)$
 e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\text{sen}(x)} - \sqrt{1-\text{sen}(x)}}{2^{3x} - 1}$ m) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{e^{\cos(x)} - 1}{\cos(x)}$
 f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln \left[\frac{x^2+4}{x^2+1} \right]$ n) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3^{\sqrt{x}} - 3^{\sqrt{2}}}{x-2}$
 g) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\text{tg}(x) - \text{tg}(a)}{x-a}, a \neq 0$ o) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-4}{x+5} \right)^{x+2}$
 h) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen}(x)}{h}$

Resposta do exercício

1.12.3.

- a) $-\frac{1}{4}$ b) 0 c) $\frac{e}{2}$ d) $4 \ln(3)$
 e) $\frac{1}{3 \ln(2)}$ f) 3 g) $\frac{1}{\cos^2(a)}$ h) $\cos(x)$
 i) $\frac{2}{3}$ j) 1 k) $-\ln(2)$ l) 1
 m) 1 n) $\frac{\sqrt{2} \cdot 3^{\sqrt{2}}}{4} \cdot \ln(3)$ o) $\frac{1}{e^9}$

1.13 Lista de Exercícios

Exercício 1.13.1. Considere a função: $f(x) = \begin{cases} -5, & \text{se } x < -2 \\ -x^2 + 1, & \text{se } -2 \leq x \leq 1 \\ x - 1, & \text{se } x > 1. \end{cases}$

a) Complete a Tabela 4:

Tabela 4: Item a) do Exercício 1.13.1

x	-3	-2,5	-2,1	-2,01	-2,001	-2	-1,999	-1,99	-1,9	-1,5	1
$f(x)$						-					

- b) O que se pode concluir sobre $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ baseado na Tabela 4? Calcule $f(-2)$.
- c) Complete a Tabela 5:

Tabela 5: Item c) do Exercício 1.13.1

x	0	0,5	0,9	0,99	0,999	1	1,001	1,01	1,1	1,5	2
$f(x)$						-					

- d) O que se pode concluir sobre $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ baseado na Tabela 5? Calcule $f(1)$.
- e) Esboce o gráfico de $f(x)$.

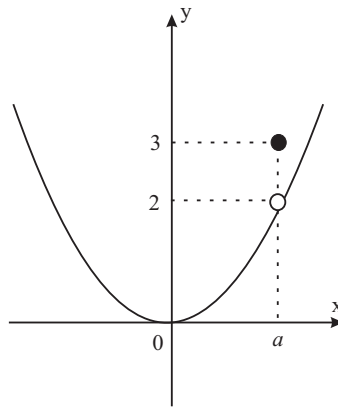
Exercício 1.13.2. Para cada afirmação, assinale V, se for verdadeira, ou F, se for falsa. Justifique sua resposta em ambos casos.

- a) A expressão $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ descreve o comportamento da função f quando $x = a$.
- b) A expressão $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ significa que, dado um $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - L| < \epsilon$.
- c) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ só existe se a função estiver definida em $x = a$.
- d) Para uma função $f(x)$, se os limites laterais à direita e à esquerda de um ponto a forem iguais, então existe limite de $f(x)$ com x tendendo a a .

Exercício 1.13.3. Considere o gráfico de $f(x)$ na Figura 1.33. Para cada afirmação, assinale V, se for verdadeira, ou F, se for falsa. Justifique suas respostas.

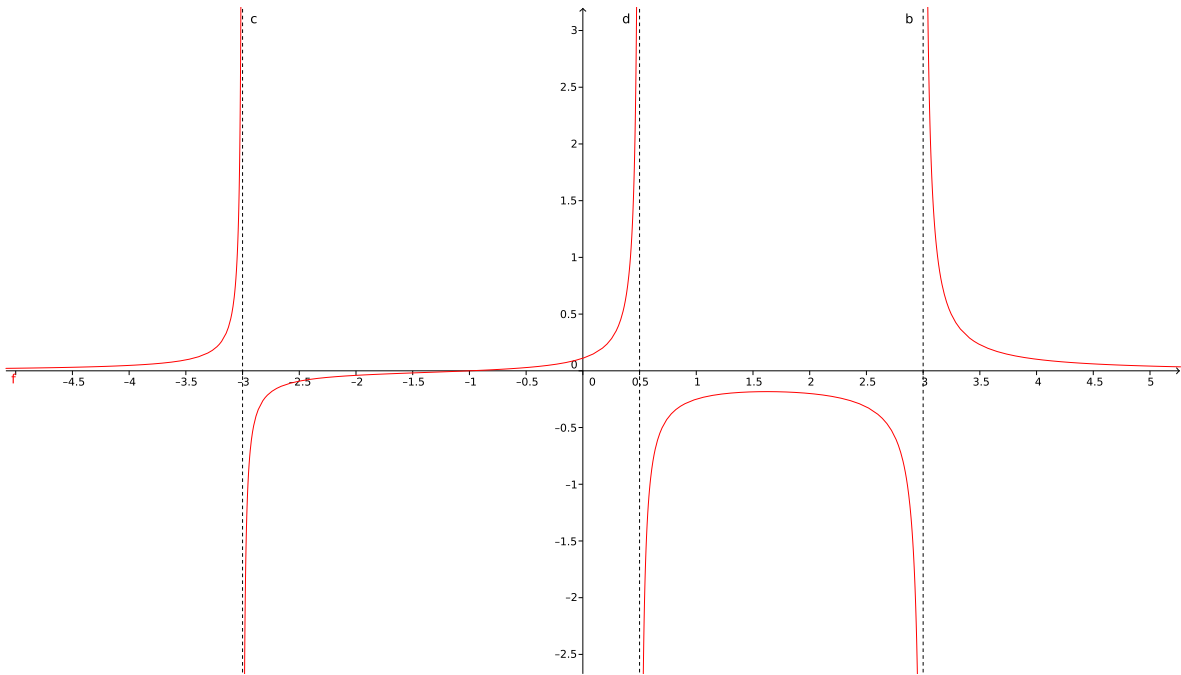
- a) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ não existe.
- b) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 2$.
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3$.

Exercício 1.13.4. Os limites a seguir já estão resolvidos. Verifique se você entendeu cada um dos limites e indique as propriedades que foram utilizadas em cada um deles (como está escrito na letra a).

Figura 1.33: Gráfico de $f(x)$.

- a) $\lim_{x \rightarrow 1} 6 = 6 \rightarrow$ a resposta é 6, pois o limite de uma constante é a própria constante.
- b) $\lim_{x \rightarrow 7} -1 = -1$
- c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
- d) $\lim_{x \rightarrow 1} (6 + x) = 7$
- e) $\lim_{x \rightarrow 7} (-1 - x) = -8$
- f) $\lim_{x \rightarrow 7} 2x = 14$
- g) $\lim_{x \rightarrow -2} 2x = -4$
- h) $\lim_{x \rightarrow 1} 2x^2 = 2$
- i) $\lim_{x \rightarrow -1} (-3x + 2) = 5$.

Exercício 1.13.5. O gráfico da Figura 1.13.5 ilustra a função $f(x) = \frac{x + 1}{(x^2 - 9)(2x - 1)}$.



- a) Determine o domínio de $f(x)$.
- b) Escreva a equação das retas b , c e d .
- c) Determine:

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) =$$

- d) Baseado no item c), responda:

Existe $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$?

Existe $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$?

Existe $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x)$?

Existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$?

Existe $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$?

- e) O gráfico possui assíntotas horizontais? Possui assíntotas verticais? Em caso afirmativo, escreva a equação de cada assíntota.

Exercício 1.13.6. Um corpo é solto no instante $t = 0$ de uma altura $s_0 = 1$ e permanece em repouso após atingir o solo. Supondo que a aceleração da gravidade é 2 m/s^2 , sua posição vertical é representada por:

$$s(t) = \begin{cases} 1 - t^2, & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{se } t \geq 1. \end{cases} \quad (1.13.1)$$

Se fixarmos um instante t_0 , então a velocidade média entre os instantes t_0 e um instante qualquer t é dada por

$$v_m = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

Suponha que $t_0 = 1$, então a velocidade média entre os instantes 1 e t é:

$$v_m(t) = \frac{s(t) - s(1)}{t - 1} = \frac{s(t)}{t - 1}.$$

- a) Considerando $s(t)$ como descrita em (1.13.1), complete

$$v_m(t) = \begin{cases} \text{-----} & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ \text{-----} & \text{se } t \geq 1. \end{cases}$$

- b) Calcule $\lim_{t \rightarrow 1^+} v_m(t)$ e $\lim_{t \rightarrow 1^-} v_m(t)$.
 c) O que se pode dizer sobre a velocidade em $t = 1$.
 d) Esboce o gráfico de $s(t)$.
 e) Esboce o gráfico de $v_m(t)$.

Exercício 1.13.7. Calcule os limites:

- | | | |
|--|--|---|
| a) $\lim_{y \rightarrow -5} \frac{y^2}{5 - y}$ | f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+3} - \sqrt{x+2})$ | k) $\lim_{v \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9v^2 + v + 1}}{\sqrt{3v^2 + 4}}$ |
| b) $\lim_{z \rightarrow 0} (2z - 8)^{\frac{1}{3}}$ | g) $\lim_{m \rightarrow 0} \text{sen}(m) \cdot \text{cosec}(m)$ | l) $\lim_{v \rightarrow 0^+} [\ln(v) - \ln(\text{sen}(v))]$ |
| c) $\lim_{v \rightarrow 2} \frac{v^3 - 8}{v^4 - 16}$ | h) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right)$ | m) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{cotg}(x)}{\text{cosec}(x)}$ |
| d) $\lim_{z \rightarrow 4} \frac{4z - z^2}{2 - \sqrt{z}}$ | i) $\lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{5y^3 - 12y + 7}{8y^2 - 1}$ | n) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\text{sen}(x)}}$ |
| e) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)$ | j) $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{2y^3 - 4}{5y + 3}$ | o) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. |

Exercício 1.13.8. Marque com um X a alternativa correta:

i) O resultado de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 5^{-x}}{5x^2 \cotg(x)}$ é:

(a) $\frac{2 \ln(5)}{5}$ (b) $\frac{5 \ln(2)}{2}$ (c) 1 (d) 0 (e) $\frac{1}{12}$.

ii) O $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\text{sen}(x - 2) + x^2 - 4x + 4}{x^3 - 8}$ vale:

(a) $\frac{2 \ln(5)}{5}$ (b) $\frac{5 \ln(2)}{2}$ (c) 1 (d) 0 (e) $\frac{1}{12}$.

Exercício 1.13.9. Associe cada limite da Coluna 1, com seu resultado na Coluna 2.

Coluna 1

Coluna 2

(a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3 - 2x - x^2}{x^2 - 1}$

() 6

(b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 25}{x^2 - 5x}$

() $\frac{1}{2}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{12 - 4x}{3 - \sqrt{x + 6}}$

() $\#$

(d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - 12x^5 + 12x^4 - 3}{3x - 2x^4 + 3x^5 + 6}$

() 2

(e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$

() 5

(f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x + 1}{x - 1} \right)^x$

() e^2

(g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$

() -4

(h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 5x)}{x}$

() 24

Exercício 1.13.10. Sejam $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 5$, calcule o valor de $L =$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x) - g(x)}{[f(x) + 7]^{\frac{2}{3}}}.$$

Exercício 1.13.11. Se $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 5}{x - 2} = 1$, determine $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

Exercício 1.13.12. Determine as assíntotas dos gráficos das funções:

a) $f(x) = \frac{x+3}{x+2}$

b) $f(x) = \frac{-8}{x^2-4}$

c) $f(x) = \frac{x}{x+8}$

d) $f(x) = \frac{x+1}{x}$.

Exercício 1.13.13. A derivada de uma função $f(x)$ é definida como

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Calcule a derivada de:

a) $f(x) = e^x$

b) $f(x) = \cos(x)$.

Respostas dos exercícios

1.13.1.

a) Tabela 6: Item a) do Exercício 1.13.1

x	-2,5	-2,1	-2,01	-2,001	-2	-1,999	-1,99	-1,9	-1,5	1
$f(x)$	-5	-5	-5	-5	-3	-2,996001	-2,9601	-2,61	-1,25	0

b) não existe

c) Tabela 7: Item c) do Exercício 1.13.1

x	0	0,5	0,9	0,99	0,999	1	1,001	1,01	1,1	1,5	2
$f(x)$	1	0,75	0,19	0,0199	0,001999	0	0,001	0,01	0,1	1/2	1

d) 0.

1.13.2. a) F b) V c) F d) V

1.13.3. a) F b) V c) F.

1.13.4. Nos itens b), c) utiliza-se a propriedade do limite de uma constante. Nos itens d) - i) emprega-se a propriedade do limite de uma função polinomial.

1.13.5.

a) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3, 1/2\}$.

b) $x = 3$, $x = -3$ e $x = \frac{1}{2}$.

c) Coluna 1: $+\infty, -\infty, +\infty, -\infty, -\infty, +\infty$. Coluna 2: $0, 0, 0, 0, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}$.

d) Não; não; não; sim; sim.

e) Verticais: $x = 3$, $x = -3$ e $x = \frac{1}{2}$. Horizontais: $y = 0$.

1.13.6.

a) $v_m(t) = \begin{cases} -(t+1) & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{se } t \geq 1. \end{cases}$

b) $\lim_{t \rightarrow 1^+} v_m(t) = 0$ e $\lim_{t \rightarrow 1^-} v_m(t) = -2$.

c) não existe

a) $\frac{5}{2}$

b) -2

c) $\frac{3}{8}$

d) 16

e) $-\infty$

f) 0

g) 1

h) -1

1.13.7.

i) $-\infty$

j) $+\infty$

k) $\sqrt{3}$

l) 0

m) 1

n) 1

o) -1 .

1.13.8. i) (a) ii) (e).

1.13.9. (b),(e),(a),(g),(h),(f),(d),(c).

1.13.10. $L = -\frac{3}{4}$.

1.13.11. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$.

1.13.12.

a) Assíntota horizontal $y = 1$, Assíntota vertical $x = -2$ b) Assíntota horizontal $y = 0$, Assíntotas verticais $x = -2$ e $x = 2$ c) Assíntota horizontal $y = 1$, Assíntota vertical $x = -8$ d) Assíntota horizontal $y = 1$, Assíntota vertical $x = 0$.1.13.13. a) $f'(x) = e^x$ b) $f'(x) = -\text{sen}(x)$.