UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE-FURG
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E FÍSICA-IMEF
LABORATÓRIO DE ESTUDOS DO ENSINO DE MATEMÁTICA SUPERIOR -LEMAS
Andressa Machado, Kaline Silva

ROTEIRO DE ATIVIDADES: O PROCESSO DE COMPLETAR QUADRADO

DATA: 08/08/2019

HORÁRIO: 13:30hs

DURAÇÃO: 1 Hora e 40 minutos

TEMA: O PROCESSO DE COMPLETAR QUADRADO

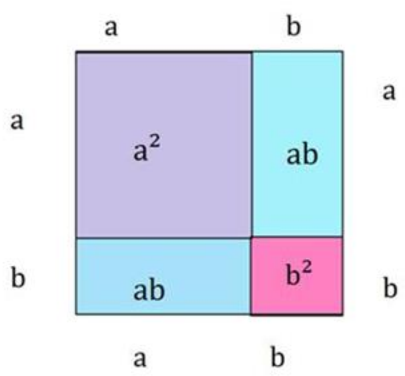
ATIVIDADE:

1° Momento: Representação do quadrado perfeito

Baseado na interpretação geométrica dada pelos gregos, considerando a expressão $(a+b)^2$, o matemático co-árabe Al-khowarizmi no século IX, estabeleceu um processo geométrico para a resolução de equações de 2° grau com uma incógnita.

Inicialmente, observe a Figura 1 que representa geometricamente a expressão $(a+b)^2$:

Figura 1: Representação geométrica do quadrado de lado a+b



Fonte: Os autores.

Note que $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, onde a^2 é a área do quadrado de lado a, ab é a área de cada um dos retângulos de lados a e b respectivamente, e a área do quadrado de lado b é b^2.

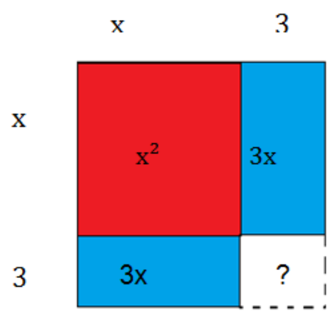
2° Momento: Completando o quadrado

Baseando-se na interpretação geométrica conforme a Figura 1, considere a expressão:

$$\boxed{x^2+6x}$$

Note que ela pode ser reescrita como $\mathbf{x^2+ 2.(3x)}$. Observe que x^2 é a área de um quadrado cujo lado mede x, e 3x é a área do retângulo de lados 3 e x, respectivamente. A Figura 2 ilustra essa expressão de forma geométrica.

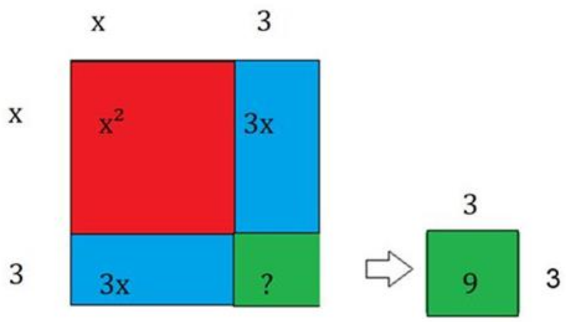
Figura 2: Representação geométrica de $x^2+ 2.(3x)$



Fonte: Os autores.

Qual valor devemos acrescentar a $\mathbf{x^2+ 2.(3x)}$ para que a expressão represente um quadrado perfeito? Para responder essa pergunta, observe a Figura 3.

Figura 3: Completando o quadrado



Fonte: Os autores.

Portanto, devemos adicionar o número 9 para que a expressão **x^2+ 2.(3x)** se torne um quadrado perfeito. Assim:

$$\boxed{x^2+6x= x^2+6x+9-9 = (x+3)^2 - 9}$$

3° Momento: Resolvendo equações quando o quadrado não é perfeito

Para resolver a equação $x^2+6x+8=0$ utilizando o completamento de quadrado, vamos considerar primeiramente a expressão x^2+6x. Assim, teremos: $x^2+6x= x^2 + 2\cdot(3x)$.

Note que o quadrado será igual ao da Figura 2, pois x^2 é a área de um quadrado de lado x, e 3x é área do retângulo de lados 3 e x.

Porém, a equação dada é $x^2+6x+8=0$ e subtraindo 8 em ambos os lados da igualdade temos:

$$x^2+6x+8-8 = -8$$

$$x^2+6x= -8.$$

Para completar o quadrado é necessário adicionar 9 em ambos os lados da igualdade:

$$x^2+6x\mathbf{+9} = -8\mathbf{+9}$$

$$x^2+6x+9 = 1.$$

Fatorando o trinômio do quadrado perfeito no 1° membro, temos:

$$(x+3)^2=1$$

As expressões que satisfazem a equação anterior são:

$(x+3)=+\sqrt{1}$ $\qquad$ $(x+3)= -\sqrt{1}$

$x+3= 1$ $\qquad$ $x+3 = -1$

$x= -2$ $\qquad$ $x= -4$

Verificando se as soluções encontradas satisfazem à equação original:

Para x= -2: $(-2)^2+6(-2)+9=1 \rightarrow 4-12+9=1 \rightarrow 1=1$

Para x= -4: $(-4)^2+.(-4)+9=1 \rightarrow 16-24+9=1 \rightarrow 1=1$

Logo, o conjunto solução da equação é S=$\{-4,-2\}$.

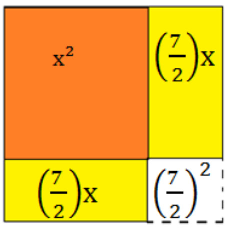
4° momento: Quando o fator que contém x não é múltiplo de 2

Considere a expressão **x^2+7x**. Podemos reescrever essa expressão de forma conveniente:

$$x^2+7x= x^2 + 2.\left(\frac{7}{2}\right)x .$$

Note que x^2 é a área de um quadrado no qual os lados medem x e $\left(\frac{7}{2}\right)x$ é a área do retângulo tal que um dos lados mede x e o outro $\left(\frac{7}{2}\right)$. Observe a Figura 4.

Figura 4: Completando o quadrado a partir de x^2+7x



Fonte: Os autores.

Para completar o quadrado ilustrado na Figura 4 é preciso acrescentar um quadrado de lados $\left(\frac{7}{2}\right)$ ou seja, um quadrado de área $\left(\frac{7}{2}\right)^2$ então:

$$x^2+7x=x^2+2\frac{7}{2}x=x^2+2\frac{7}{2}x+\left(\frac{7}{2}\right)^2-\left(\frac{7}{2}\right)^2=\left(x+\frac{7}{2}\right)^2-\left(\frac{7}{2}\right)^2$$

EXEMPLOS:

1) **Completar os quadrados para resolver as seguintes equações:**

a) $x^2-4x-21=0 \rightarrow x^2-4x+4=25 \rightarrow (x-2)^2=25$

$$x-2=\sqrt{25} \qquad x-2=-\sqrt{25}$$

$$x-2=+5 \qquad x-2=-5$$

$$x=7x=-3$$

$$Solução=\{-3,7\}$$

Verificando se a solução é verdade:

Para $x=-3$: $(-3)^2-4(-3)-21=9+12-21=21-21=0$

Para $x=7$: $7^2-47-21=49-28-21=21-21=0$

b) $3x^2-4x+5=3\left(x^2-\frac{4}{3}x\right)+5=3\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}-\frac{4}{9}\right)+5=$

$$3\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}\right)+5-\frac{4\times 3}{9}=3\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}\right)+5-\frac{12}{9}=$$

$$3\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}\right)+5-\frac{4}{3}=3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+5-\frac{4}{3}=$$

$$3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{11}{3}\rightarrow 3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{11}{3}=0\rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{11}{3}=\left(\frac{1}{3}\right)0\rightarrow\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{11}{9}=0$$

- Algumas operações feitas ao decorrer do desenvolvimento do exercício.

Dividindo pela metade o 2º termo e elevando-o ao quadrado

$$\frac{4}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 = \left(x - \frac{2}{3}\right) \times \left(x - \frac{2}{3}\right) =$$
$$x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}x + \frac{4}{9} = x^2 - \frac{4}{3} + \frac{4}{9}$$

$$5 = \frac{15}{3} \rightarrow \frac{15}{3} - \frac{4}{3} = \frac{15-4}{3} = \frac{11}{3}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS PARA COMPLETAR QUADRADOS

1) Resolva as equações completando o quadrado:

a) $x^2 + 8x - 9 = 0$ R.: $x = 1$ e $x = -9$

b) $3x^2 - 17x + 20 = 0$ R.: $x = 4$e $x = \frac{5}{3}$

2) Reescreva as expressões completando o quadrado:

a) $x^2 + x + 1$ R.:$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$

b) $2x^2 - 12x + 11$ R.:$2.\,(x - 3)^2 - 7$