UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE - FURG
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E FÍSICA - IMEF
LABORATÓRIO DE ESTUDOS DO ENSINO DE MATEMÁTICA SUPERIOR - LEMAS

PARTE 1

Frações parciais

O processo de frações parciais tem como objetivo decompor uma função racional como soma de outras funções mais simples.

Considerando $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ uma função racional onde P e Q são polinômios,

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$Q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0,$$

tais que $Q(x) \neq 0$.

É possível expressar f como uma soma de frações mais simples, desde que o grau $P(x) <$ grau $Q(x)$. Logo essa função racional é denominada <u>própria</u>.

1º CASO

O denominador Q é um produto de fatores lineares distintos. Isso significa que podemos escrever

$$Q(x) = (a_1 x + b_1).(a_2 x + b_2) \ldots (a_k x + b_k),$$

onde nenhum fator é repetido. Neste caso, o método de decomposição em frações parciais afirma que existem constantes $A_1, A_2, \ldots, A_k$ tais que:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1 x + b_1} + \frac{A_2}{a_2 x + b_2} + \cdots + \frac{A_k}{a_k x + b_k}.$$

Essas constantes $A_1, A_2, \ldots, A_k$ podem ser determinadas como no exemplo a seguir.

Exemplo: Vamos decompor $f(x) = \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}$ em frações parciais.

Como o grau do numerador é menor que o grau do denominador, podemos fatorar o denominador:

$$2x^3 + 3x^2 - 2x = 2x(x+2)(x-\tfrac{1}{2}) = x(2x-1)(x+2).$$

Como o denominador tem três fatores lineares distintos, a decomposição em frações parciais tem a forma:

$$\frac{x^2+2x-1}{x(2x-1)(x+2)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{2x-1} + \frac{A_3}{x+2}.$$

Para determinar os valores de A_1, A_2, A_3 multiplicamos ambos os lados dessa equação pelo produto dos denominadores $x(2x-1)(x+2)$, obtendo:

$$x^2 + 2x - 1 = A_1(2x-1)(x+2) + A_2x(x+2) + A_3x(2x-1).$$
$$x^2 + 2x - 1 = A_1\,(2x^2+3x-2) + A_2x(x+2) + A_3x(2x-1).$$
$$x^2 + 2x - 1 = (2A_1 + A_2 + 2A_3)x^2 + (3A_1 + 2A_2 - A_3)x - 2A_1. \qquad \textbf{(*)}$$

O coeficiente de x^2 do lado direito de (*), $2A_1 + A_2 + 2A_3$, deve ser igual ao coeficiente de x^2 do lado esquerdo de (*), ou seja, 1. Do mesmo modo, os coeficientes de x são iguais e os termos constantes também.

Isso resulta no seguinte sistema de três equações e três variáveis A_1, A_2 e A_3:

$$2A_1 + A_2 + 2A_3 = 1$$
$$3A_1 + 2A_2 - A_3 = 2$$
$$-2A_1 = -1.$$

Resolvendo obtemos: $A_1 = \frac{1}{2}$, $A_2 = \frac{1}{5}$ e $A_3 = -\frac{1}{10}$.

E assim, f pode ser reescrita como:

$$\frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x} = \frac{1/2}{x} + \frac{1/5}{2x-1} - \frac{1/10}{x+2}.$$

2º CASO

O denominador Q é um produto de fatores lineares repetidos.

Suponhamos que o primeiro fator linear (a_1x+b_1) seja repetido r vezes, ou seja, $(a_1x+b_1)^r$. Então, em vez de um único termo $\frac{A_1}{(a_1x+b_1)}$, usaríamos:

$$\frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{(a_1x+b_1)^2} + \cdots + \frac{A_r}{(a_1x+b_1)^r}.$$

Exemplo: Vamos decompor $f(x) = \frac{x^3-x+1}{x^2(x-1)^3}$ em frações parciais.

Podemos escrever f como tendo a seguinte decomposição em frações parciais:

$$\frac{x^3-x+1}{x^2(x-1)^3} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x-1} + \frac{A_4}{(x-1)^2} + \frac{A_5}{(x-1)^3}.$$

Para determinar os valores de A_1, A_2, A_3, A_4 e A_5 multiplicamos ambos os lados da equação anterior pelo mmc dos denominadores, obtendo:

$$x^3-x+1 = A_1x(x-1)^3 + A_2(x-1)^3 + A_3x^2(x-1)^2 + A_4x^2(x-1) + A_5x^2.$$

Expandindo os fatores de cada parcela:

$$x^3-x+1 = A_1(x^4-3x^3+3x^2-x) + A_2(x^3-3x^2+3x-1)$$
$$+ A_3(x^4-2x^3+x^2) + A_4(x^3-x^2) + A_5x^2.$$

Agrupando os termos semelhantes:

$x^3-x+1 = (A_1+A_3)x^4 + (-3A_1+A_2-2A_3+A_4)x^3 + (3A_1-3A_2+A_3-A_4+A_5)x^2 + (-A_1+3A_2)x - A_2.$ **(**)**

O coeficiente de x^3 do lado direito de (**), $-3A_1 + A_2 - 2A_3 + A_4$, deve ser igual ao coeficiente de x^3 do lado esquerdo de (**), ou seja, 1. Do mesmo modo, os coeficientes de x são iguais e os termos constantes também.

Logo obtemos o seguinte sistema:

$$
\begin{gathered}
A_1 + A_3 = 0 \\
-3A_1 + A_2 - 2A_3 + A_4 = 1 \\
3A_1 - 3A_2 + A_3 - A_4 + A_5 = 0 \\
-A_1 + 3A_2 = -1 \\
-A_2 = 1.
\end{gathered}
$$

Resolvendo, chegamos a $A_1 = -2, A_2 = -1, A_3 = 2, A_4 = 0$ e $A_5 = 1$.

E assim, f pode ser reescrita como:

$$
\begin{aligned}
\frac{x^3 - x + 1}{x^2(x-1)^3} &= \frac{-2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x-1} + \frac{0}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3} \\
&= \frac{-2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^3}.
\end{aligned}
$$

EXERCÍCIOS: Escreva $f(x)$ na forma de decomposição em frações parciais.

1) $f(x) = \frac{x^4 - 2x + 1}{x^3(x-1)^4}$

2) $f(x) = \frac{3x+1}{x^2+4x+3}$