PARTE 3

5º CASO

Consideramos $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ uma função racional onde P e Q são polinômios,

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$Q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0,$$

tais que $Q(x) \neq 0$.

Se f é imprópria, isto é, grau $P(x) \geq$ grau $Q(x)$, então devemos fazer uma etapa preliminar dividindo P por Q até o resto $R(x)$ ser obtido com grau de $R(x) <$ grau de $Q(x)$. O resultado da divisão é

$f(x) = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$, onde R e S também são polinômios.

Exemplo: Vamos decompor $f(x) = \frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1}$ em frações parciais.

Como temos o grau do numerador maior que o grau do denominador precisamos fazer a divisão de polinômios. O resultado da divisão é:

$$\frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} = x + 1 + \frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1}.$$

A partir daí já podemos fatorar o denominador $Q(x) = x^3 - x^2 - x + 1$. Como $Q(1) = 0$, sabemos que $x - 1$ é um termo da fatoração de Q. Assim:

$$x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)(x^2-1) = (x-1)(x-1)(x+1) = (x-1)^2(x+1).$$

Como o fator linear $x - 1$ ocorre duas vezes, a decomposição em frações parciais é:

$$\frac{4x}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{x+1}.$$

Multiplicando pelo mínimo múltiplo comum, $(x-1)^2(x+1)$, temos:

$$4x = A_1(x-1)(x+1) + A_2(x+1) + A_3(x-1)^2.$$

Expandindo as parcelas e aplicando a propriedade distributiva na equação anterior:

$$4x = A_1(x^2-1) + A_2(x+1) + A_3(x^2-2x+1).$$

Agrupando os termos semelhantes:

$$4x = (A_1 + A_3)x^2 + (A_2 - 2A_3)x + (-A_1 + A_2 + A_3).$$

Agora igualando os coeficientes da equação anterior, temos:

$$\begin{aligned} A_1 + A_3 &= 0 \\ A_2 - 2A_3 &= 4 \\ -A_1 + A_2 + A_3 &= 0. \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema, obtemos: $A_1 = 1, A_2 = 2$ e $A_3 = -1$.

Assim, f pode ser reescrita como:

$$\frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} = x + 1 + \frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1} = x + 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x+1}.$$

EXERCÍCIO: Escreva $f(x) = \frac{x^4 - x^3 - 3x^2 - 2x + 2}{x^3 + x^2 - 2x}$ na forma de decomposição em frações parciais.