IMEF - FURG - IMEF - FURG - IMEF - FURG - IMEF - FURG - IMEF - FURG - IMEF - FURG - IMEF - FURG - IMEF - FURG - IMEF - FURG - IM

BÁRBARA DENICOL DO AMARAL RODRIGUEZ
CINTHYA MARIA SCHNEIDER MENEGHETTI
CRISTIANA ANDRADE POFFAL

# SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

1ª Edição

Editora da furg

Rio Grande
2017

IMEF - FURG - IMEF - FURG - IMEF - FURG - IMEF - FURG - IMEF - FURG - IMEF - FURG - IMEF - FURG - IMEF - FURG - IM

Universidade Federal do Rio Grande - FURG

# NOTAS DE AULA DE CÁLCULO

Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF

Bárbara Rodriguez

Cinthya Meneghetti

Cristiana Poffal

lemas.furg.br

# Sumário

# Capítulo 1

# Sequências Numéricas

## 1.1 Uma breve introdução

A palavra sequência é usualmente empregada para representar uma sucessão de objetos ou fatos em uma ordem determinada. Essa ordem pode ser de tamanho, de lógica, de ordem cronológica, entre outros. Em matemática é utilizada comumente para denotar uma sucessão de números cuja ordem é determinada por uma lei ou função que é chamada de termo geral da sequência ou lei de recorrência.

A teoria de séries é uma ferramenta matemática importante na resolução de equações diferenciais e na obtenção de resultados em computação numérica. Para desenvolver a teoria de séries, estudam-se primeiro as chamadas sequências infinitas.

Sequências e séries de funções tiveram seu estudo impulsionado a partir das contribuições de Newton (1642–1727) e Leibniz (1646–1716). Ambos desenvolveram representações de séries para funções. Usando métodos algébricos e geométricos, Newton determinou as séries de potências para as funções trigonométricas $\mathrm{sen}(x)$ e $\cos(x)$ e para a função exponencial. Ele utilizou séries para desenvolver muitos resultados do Cálculo, tais como área, comprimento de arco e volumes. Para calcular áreas, por exemplo, ele, frequentemente, integrava uma função, primeiramente expressando-a como uma série, e então integrando cada termo.

## 1.2 Sequências numéricas

Uma sequência numérica, ou simplesmente, uma sequência, é uma sucessão de números. Ela pode ser pensada como uma lista de números escritos em uma ordem definida $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$.

Os valores $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ são chamados termos da sequência. O número $a_1$ é chamado de primeiro termo, $a_2$ é o segundo termo e, em geral, $a_n$ é dito o $n$-ésimo termo.

**Observação 1.2.1.** Em algumas ocasiões é conveniente denotar o primeiro termo da sequência por $a_0$. Neste caso, a sequência tem a forma: $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$.

**Definição 1.2.1.** Uma sequência de números reais $(a_n)$ é uma função $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que associa a cada número natural $n$ um número real $a_n$.

**Observação 1.2.2.** A notação $(a_n)$ é utilizada com frequência ao longo deste texto para denotar uma sequência. Também pode-se escrever $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$, $\{a_n\}$ ou simplesmente $a_n$, nos dois últimos supõe-se que $n \geq 1$. Pode-se também usar quaisquer outras letras, como por exemplo $(b_n)$ ou $(c_n)$.

**Exemplo 1.2.1.** Iniciando em $n = 1$, escreva os cinco primeiros termos de cada uma das seguintes sequências cujos $n$-ésimos termos são representados por

a) $a_n = 3 + (-1)^n$

b) $b_n = \dfrac{2n}{1+n}$

c) $c_n = \dfrac{n^2}{2^n - 1}$

d) $d_n = \dfrac{1}{2^n}$.

Solução:

a) $a_n = 3 + (-1)^n$

Substitui-se o valor de $n$ na expressão de $a_n$ para obter os termos da sequência, isto é:

$a_1 = 3 + (-1)^1 = 2;$

$a_2 = 3 + (-1)^2 = 4;$

$a_3 = 3 + (-1)^3 = 2;$

$a_4 = 3 + (-1)^4 = 4;$

$a_5 = 3 + (-1)^5 = 2.$

Assim, os cinco primeiros termos da sequência são: $2, 4, 2, 4, 2$.

b) $b_n = \dfrac{2n}{1+n}$

Substitui-se o valor de $n$ na expressão de $b_n$ para calcular os termos da sequência:

$b_1 = \dfrac{2 \cdot 1}{1+1} = \dfrac{2}{2};$
$b_2 = \dfrac{2 \cdot 2}{1+2} = \dfrac{4}{3};$
$b_3 = \dfrac{2 \cdot 3}{1+3} = \dfrac{6}{4};$
$b_4 = \dfrac{2 \cdot 4}{1+4} = \dfrac{8}{5};$
$b_5 = \dfrac{2 \cdot 5}{1+5} = \dfrac{10}{6}.$

Logo, os cinco primeiros termos da sequência são: $\dfrac{2}{2}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{6}{4}, \dfrac{8}{5}, \dfrac{10}{6}$.

c) $c_n = \dfrac{n^2}{2^n - 1}$

Aplica-se o valor de $n$ na expressão de $c_n$ para determinar os termos da sequência:

$c_1 = \dfrac{1^2}{2^1 - 1} = 1;$
$c_2 = \dfrac{2^2}{2^2 - 1} = \dfrac{4}{3};$
$c_3 = \dfrac{3^2}{2^3 - 1} = \dfrac{9}{7};$
$c_1 = \dfrac{4^2}{2^4 - 1} = \dfrac{16}{15};$
$c_1 = \dfrac{5^2}{2^5 - 1} = \dfrac{25}{31}.$

Portanto, os cinco primeiros termos da sequência são: $1, \dfrac{4}{3}, \dfrac{9}{7}, \dfrac{16}{15}, \dfrac{25}{31}$.

d) $d_n = \dfrac{1}{2^n}$

Na expressão de $d_n$, aplica-se o valor de $n$ para calcular os termos da sequência:

$d_1 = \dfrac{1}{2^1} = \dfrac{1}{2};$
$d_2 = \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{4};$
$d_3 = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8};$
$d_4 = \dfrac{1}{2^4} = \dfrac{1}{16};$

$d_5 = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$.

Consequentemente, os cinco primeiros termos da sequência são: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$.

**Exemplo 1.2.2.** Começando em $n = 1$, determine uma expressão para o $n$-ésimo termo das sequências em função de $n$:

a) $1, 4, 7, 10, \ldots$

b) $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$

c) $2, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$

d) $2, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{5}, \ldots$.

Solução:

a) $1, 4, 7, 10, \ldots$

Analisando a sequência, observa-se que se trata de uma progressão aritmética (PA) que inicia em $a_1 = 1$ e tem razão 3, pois a diferença entre um termo e seguinte é de 3 unidades.

O termo geral da PA é $a_n = a_1 + (n-1)r$, logo, $a_n = 1 + (n-1) \cdot 3$, isto é, $a_n = 3n - 2$.

b) $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$

Neste caso, verifica-se que os numeradores formam uma sequência de números naturais iniciando em 2. Os denominadores também, entretanto inicia em 3. Assim, escreve-se o termo geral da sequência como: $a_n = \frac{n+1}{n+2}$.

c) $2, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$

Neste caso, percebe-se a alternância de sinais positivo e negativo, o que acarreta a presença do termo $(-1)^{n+1}$, uma vez que a sequência inicia em 1. Este termo deve multiplicar $2^{2-n}$ para produzir as potências do número 2.

Portanto, o termo geral da sequência é $a_n = (-1)^{n+1} \cdot 2^{2-n}$.

d) $2, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{3}, 1+\frac{1}{4}, 1+\frac{1}{5}, \ldots$.

A partir do segundo termo, tem-se $1+\frac{1}{n}$, como a sequência inicia em $n=1$ verifica-se que a expressão serve desde o primeiro termo.

Logo, escreve-se $a_n = 1+\frac{1}{n}$.

**Observação 1.2.3.** Nem sempre é possível representar o termo geral de uma sequência por uma fórmula. Observe o exemplo da sequência dos números primos,

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, \ldots.$$

Não existe uma fórmula para o termo geral da sequência dos números primos, mas todos eles estão determinados e podem ser encontrados, por exemplo, pelo chamado "crivo de Erastóstenes".

## 1.3 Convergência de sequências numéricas

Sequências cujos termos se aproximam de um valor limite são ditas **convergentes**, enquanto que sequências que não possuem limites são ditas **divergentes**.

**Definição 1.3.1.** A sequência $(a_n)$ converge para o número $L$ se

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L \text{ ou } a_n \to L \text{ quando } n \to +\infty,$$

isto é, para todo número positivo $\epsilon$ existe um número inteiro $N$ tal que para todo $n$

$$n > N \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon.$$

O número $L$ é dito limite da sequência. Se este número $L$ não existe, dizemos que $(a_n)$ diverge.

**Observação 1.3.1.** Ao representar os pontos $(n, a_n)$ no plano cartesiano, pode-se observar que $a_n$ convergir para $L$ significa que para todo $\epsilon > 0$, existe um ponto na sequência a partir do qual todos os termos estão entre as retas $y = L-\epsilon$ e $y = L+\epsilon$.

**Exemplo 1.3.1.** Considere a sequência cujo termo geral é $a_n = \frac{n}{n+1}$. Neste caso,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 1.$$

IMEF - FURG - IMEF - FURG - IMEF - FURG - IMEF - FURG - IMEF - FURG - IMEF - FURG - IMEF - FURG - IMEF - FURG - IM



De fato, seja $\epsilon > 0$, observe que

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \epsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\epsilon} - 1.$$

A última desigualdade sugere escolher $N$ como o primeiro natural maior do que $\frac{1}{\epsilon} - 1$. Observe que outro número natural maior do que este $N$ estabelecido também atende a definição de convergência.

**Exemplo 1.3.2.** Iniciando em $n = 1$ represente graficamente a sequência $(a_n) = (n+1)$, analisando o seu comportamento.

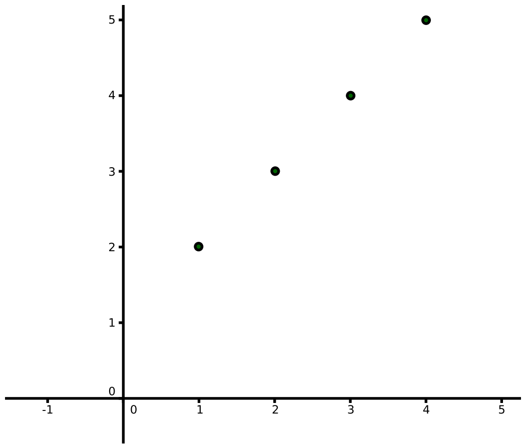



Figura 1.1: Sequência $(a_n) = (n+1)$

Observando o gráfico, pode-se confirmar que a sequência diverge.

## 1.4 Calculando limites de sequências

Como sequências são funções reais cujo domínio está restrito aos inteiros positivos, propriedades e teoremas para limites de funções estudadas durante o curso de Cálculo Diferencial possuem versões para sequências numéricas. A seguir estão enunciadas algumas das propriedades para o cálculo de limites.

Sejam $(a_n)$ e $(b_n)$ sequências de números reais convergentes e tais que $\lim_{n\to+\infty}(a_n) = L$, $\lim_{n\to+\infty}(b_n) = M$ e $L$, $M$ e $c$ números reais.

1. Regra da soma: $\lim_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = L + M$.

2. Regra da diferença: $\lim_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = L - M$.

3. Regra do produto: $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n \cdot b_n) = L \cdot M$.

4. Regra da multiplicação por uma constante: $\lim\limits_{n\to+\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot L$.

5. Regra do quociente: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{L}{M}$, se $M \neq 0$.

**Teorema 1.4.1.** Teorema para convergência de sequências numéricas.

a) Se $|c| < 1$, então $\lim\limits_{n\to+\infty} c^n = 0$.

b) Se $|c| > 1$, então $(c_n)$ diverge.

c) Se $c = 1$, então $\lim\limits_{n\to+\infty} 1^n = 1$.

O teorema a seguir nos permite aplicar a regra de L'Hospital para encontrar o limite de algumas sequências.

**Teorema 1.4.2.** Suponha que $f(x)$ seja uma função definida para todo $x > n_0$, onde $n_0 \in \mathbb{N}$ fixo. Seja $(a_n)$ uma sequência de números reais tal que $a_n = f(n)$ para todo $n > n_0$. Então,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = L.$$

*Demonstração:*

Suponha que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$. Então, para cada número positivo $\epsilon$ existe um número $M$ tal que para todo $x$,

$$x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Seja $n_0$ um número inteiro maior tal que $n_0 \geq M$. Então,

$$n > n_0 \Rightarrow a_n = f(n) \text{ e } |a_n - L| = |f(n) - L| < \epsilon.$$

**Exemplo 1.4.1.** Se possível, calcule os limites das sequências cujos $n$-ésimos termos são:

a) $a_n = \dfrac{n}{1-2n}$

b) $b_n = (-1)^n$

c) $c_n = \dfrac{2^n}{3^{n+1}}$

d) $d_n = n\mathrm{sen}\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)$.

Solução:

a) $a_n = \dfrac{n}{1-2n}$

O limite pode ser escrito como $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{1-2x}$, considerando que $x \in \mathbb{R}$.

Neste caso, pode-se utilizar a regra de L'Hospital, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{1-2x} = -\dfrac{1}{2}$.

Portanto, a sequência $a_n$ converge para $\dfrac{1}{2}$.

b) $b_n = (-1)^n$

O limite $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$ não existe, pois para $n$ par, resulta 1 e para $n$ ímpar, resulta $-1$. Logo, diz-se que a sequência diverge.

c) $c_n = \dfrac{2^n}{3^{n+1}}$

O limite desta sequência pode ser escrito como $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^n}{3\cdot 3^n}$, isto é:

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = \frac{1}{3}\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n}{3^n} = \frac{1}{3}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0, \text{ pelo Teorema 1.4.1.}$$

d) $d_n = n\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)$

Pode-se reescrever o limite desta sequência de modo a obter o limite fundamental $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}(x)}{x}$.

Assim, escreve-se: $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)}{\dfrac{1}{n}}$. Multiplica-se o numerador e o denominador da fração por $\dfrac{\pi}{2}$, define-se a nova variável $x = \dfrac{\pi}{2n}$.

Esta nova variável tende a zero quando $n$ tende a $\infty$. O novo limite é

$$\lim_{x\to 0} d_x = \frac{\pi}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}(x)}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

Portanto, a sequência $d_n$ converge para $\dfrac{\pi}{2}$.

**Exemplo 1.4.2.** Determine o $n$-ésimo termo da sequência e verifique se a mesma é convergente ou divergente.

$$a_n = 2, \frac{4}{3}, \frac{8}{5}, \frac{16}{7}, \frac{32}{9}, \ldots.$$

Solução:

Inicia-se com a determinação do termo geral da sequência através da análise dos termos dados. Verifica-se que o numerador contém potências de 2, iniciando em $n = 1$, isto é, pode-se escrever $2^n$. Já a sequência dos denominadores é composta pelos números ímpares, ou seja, $2n - 1$.

Portanto, o termo geral da sequência é $a_n = \dfrac{2^n}{2n-1}$.

A convergência ou não da sequência é obtida através do cálculo do limite do n-ésimo termo quando $n$ tende a infinito. Com o intuito de usar o Teorema 1.4.2, escreve-se para $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^x}{2x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2^x \ln(2)}{2} = +\infty.$$

Logo, a sequência $a_n = \dfrac{2^n}{2n-1}$ diverge.

**Teorema 1.4.3.** (Teorema do Confronto ou Sanduíche para sequências) Seja $n_0 \in \mathbb{N}$. Se $a_n \leq b_n \leq c_n$ para todo $n > n_0$ e

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = L,$$

então

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = L.$$

*Demonstração.* A demonstração é análoga ao Teorema do Confronto para funções.

**Observação 1.4.1.** Suprimindo-se de uma sequência $(a_n)$ um número finito de seus termos, o caráter da sequência, com $n$ tendendo ao infinito, não será alterado. Assim, se a sequência original converge para $L$ ou diverge, a nova sequência terá o mesmo comportamento, ou seja, convergirá para $L$ ou divergirá, respectivamente.

**Exemplo 1.4.3.** Aplicando o teorema do confronto, calcule os limites das sequências:

a) $a_n = \dfrac{\cos(n)}{n}$

b) $b_n = \dfrac{1}{2^n}$

c) $c_n = (-1)^n \dfrac{1}{n}$.

Solução:

a) $a_n = \dfrac{\cos(n)}{n}$

Sabe-se que $-1 \leq \cos(n) \leq 1$, logo, dividindo a desigualdade por $n$, chega-se a:

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\cos(n)}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Como $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, aplicando o Teorema do Confronto, obtém-se que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos(n)}{n} = 0.$$

Portanto, a sequência converge para 0.

b) $b_n = \dfrac{1}{2^n}$

Sabe-se que $0 \leq \dfrac{1}{2^n} \leq \dfrac{1}{n}$, logo, pelo Teorema do Confronto, escreve-se:

$$\lim_{n\to+\infty} 0 \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}.$$

Consequentemente, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$. A sequência converge para 0.

c) $c_n = (-1)^n \dfrac{1}{n}$

Sabe-se que $-\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{(-1)^n}{n} \leq \dfrac{1}{n}$.

Como $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, aplicando o Teorema do Confronto, obtém-se que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

Assim, a sequência converge para 0.

## 1.5 Sequências monótonas

**Definição 1.5.1.** Uma sequência $(a_n)$ é denominada não-decrescente se, para todo o número natural $n$, $a_n \leq a_{n+1}$, isto é, $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots$.

**Definição 1.5.2.** Uma sequência $(a_n)$ é denominada crescente se, para todo o número natural $n$, $a_n < a_{n+1}$, isto é, $a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n < \ldots$.

**Definição 1.5.3.** Uma sequência $(a_n)$ é denominada não-crescente se, para todo o número natural $n$, $a_n \geq a_{n+1}$, isto é, $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots$.

**Definição 1.5.4.** Uma sequência $(a_n)$ é denominada decrescente se, para todo o número natural $n$, $a_n > a_{n+1}$, isto é, $a_0 > a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n > \ldots$.

**Definição 1.5.5.** Uma sequência $(a_n)$ é denominada monótona se for não-crescente ou não-decrescente.

**Exemplo 1.5.1.** Determine se cada sequência é crescente, decrescente ou não nenhum dos dois.

a) $a_n = 3 + (-1)^n$

b) $b_n = \dfrac{2n}{1+n}$

c) $c_n = \dfrac{2n+1}{3n-2}$.

Solução:

a) $a_n = 3 + (-1)^n$

Analisando os primeiros termos da sequência, isto é, $2, 4, 2, 4, ...$ e assim sucessivamente, verifica-se que a sequência não é crescente e nem decrescente.

b) $b_n = \dfrac{2n}{1+n}$

Os primeiros termos da sequência são $1, \frac{4}{3}, \frac{6}{4}, \frac{8}{5}, \frac{10}{6}, ....$

Suspeita-se que a sequência seja crescente. Com o intuito de confirmar o resultado, calcula-se a diferença $b_{n+1} - b_n$, caso seja positiva, a sequência é crescente:

$$b_{n+1} - b_n = \frac{2n+2}{n+2} - \frac{2n}{1+n} = \frac{2}{(n+2)(n+1)}.$$

Como o resultado obtido é positivo para $n \geq 1$, pode-se afirmar que a sequência é crescente.

c) $c_n = \dfrac{2n+1}{3n-2}$

Calcula-se a diferença $c_{n+1} - c_n$ para verificar se a sequência é crescente ou decrescente:

$$c_{n+1} - c_n = \frac{2n+3}{3n+1} - \frac{2n+1}{3n-2} = -\frac{7}{(3n+1)(3n-2)}.$$

Como o resultado obtido é negativo para $n \geq 1$, conclui-se que a sequência $c_n$ é decrescente.

### 1.5.1 Sequência limitada

**Definição 1.5.6.** Uma sequência $(a_n)$ é limitada se existe um número real positivo $M$ tal que $|a_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$. O número $M$ é chamado de cota superior da sequência $(a_n)$.

**Teorema 1.5.1.** Se $(a_n)$ é uma sequência convergente, então $(a_n)$ é limitada.

*Demonstração.*

Seja $(a_n)$ uma sequência convergente com limite $L$. Pela definição de limite: seja $\epsilon = 1$, então existe um valor $n_0 \in \mathbb{N}$ a partir do qual tem-se que $|a_n - L| < 1$. Aplicando a desigualdade triangular, tem-se

$$|a_n| = |a_n - L + L| \leq |a_n - L| + |L| < 1 + |L|, \forall n \geq n_0. \tag{1.5.1}$$

Os únicos termos da sequência $(a_n)$, que possivelmente, não atendem à condição representada pela equação (1.5.1) são: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n_0-1}$. Considerando o número real $C$ como o maior entre todos os números $1+|L|, |a_1|, |a_2|, |a_3|, \ldots, |a_{n_0-1}|$, tem-se $|a_n| < C, \forall n \in \mathbb{N}$.

**Observação 1.5.1.** Pode-se verificar que uma sequência não converge, mostrando que ela não é limitada. Entretanto a recíproca do teorema 1.5.1 não é verdadeira, isto é, existem sequências que são limitadas e divergentes. Por exemplo, a sequência cujo termo geral é $a_n = (-1)^n$ é limitada, pois $|a_n| \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$, porém é divergente, uma vez que os valores desta sequência alternam de $-1$ para $1$ indefinidamente e portanto, não existe $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$.

### 1.5.2 Sequência monótona e limitada

**Teorema 1.5.2.** Toda sequência $(a_n)$ monótona e limitada é convergente.

*Demonstração.*

O teorema será demonstrado para o caso de sequências não-decrescentes, pois para o caso de sequências não-crescentes a demonstração é análoga.

Seja $(a_n)$ uma sequência não-decrescente e com termos positivos. Como a sequência é limitada, existe uma cota superior $M$ tal que $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots \leq a_n \leq M$.

O conjunto dos números reais é completo, então existe um valor $L$ que é a menor das cotas superiores tal que $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots \leq a_n \leq L$. Para provar que a sequência converge para $L$, toma-se um número $\epsilon > 0$. Para $\epsilon > 0$, $L - \epsilon < L$, e portanto $L - \epsilon$ não pode ser uma cota superior para a sequência. Consequentemente, existe pelo menos um $a_n$ maior que $L - \epsilon$. Em outras palavras, $L - \epsilon < a_N$ para algum $N$ inteiro positivo. Como $(a_n)$ é não-decrescente, segue que $a_N < a_n$ para todo $n > N$. Portanto,

$$L - \epsilon < a_N < a_n \leq L < L + \epsilon, \forall n > N.$$

Logo, $|a_n - L| < \epsilon$ para todo $n > N$ o que significa, por definição, que $(a_n)$ converge para $L$.

**Exemplo 1.5.2.** Determine se cada sequência é limitada, monótona, convergente.

a) $a_n = \dfrac{1}{n}$

b) $b_n = (-1)^n$.

Solução:

a) $a_n = \dfrac{1}{n}$

Todos os termos da sequência $a_n = \dfrac{1}{n}$ assumem valores menores ou iguais a 1, portanto a sequência é limitada.

A sequência também é monótona decrescente, pois a diferença $a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}$ é negativa.

Pelo Teorema 1.5.2, pode-se afirmar que a sequência $a_n$ é convergente, pois é monótona e limitada.

Calculando $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n}$, obtém-se o valor para o qual a sequência converge. Neste caso, zero.

b) $b_n = (-1)^n$

Todos os termos da sequência $b_n = (-1)^n$ assumem valores menores ou iguais a 1, portanto a sequência é limitada.

A sequência não é monótona, pois os valores da sequência são $-1, 1, -1, 1$ e assim por diante.

Neste caso, o Teorema 1.5.2 não pode ser usado para determinar se a sequência $b_n$ é convergente.

Como $\lim\limits_{n \to +\infty} (-1)^n$ não existe, diz-se que a sequência diverge.

**Algumas observações relevantes para os exercícios**

**Observação 1.5.2.** Seja $n$ um inteiro positivo, então $n$ fatorial é definido por $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$.

**Observação 1.5.3.** Zero fatorial é, por definição, igual a 1, isto é, $0! = 1$.

## 1.6 Lista de Exercícios

1. Escreva os cinco primeiros termos de cada sequência cujos n-ésimos termos são definidos por:

   a) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

   b) $b_n = n(-1)^n$

   c) $c_n = \dfrac{2^n}{2^n + 1}$

2. Iniciando com $n = 1$, escreva uma expressão para o n-ésimo termo das sequências:

   a) $1, 9, 25, 49, 81, \ldots$

   b) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \ldots$

   c) $1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$

3. Iniciando em $n = 1$ represente graficamente as sequências, analisando o comportamento de cada uma delas:

   a) $(b_n) = (-1)^{n+1}$

   b) $(c_n) = \dfrac{n}{n+1}$

   c) $(d_n) = 1 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

4. Determine se a sequências dadas convergem ou divergem. Calcule os limites nos casos em que há convergência.

a) $\{a_n\} = \left\{\dfrac{3n-2}{4n+7}\right\}$

b) $\{b_n\} = \left\{\operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)\right\}$

c) $\{c_n\} = \left\{\dfrac{n^2}{3n^3+7}\right\}$

d) $\{d_n\} = \left\{n + \dfrac{3}{n}\right\}$

e) $\{f_n\} = \left\{\dfrac{(-1)^n}{7n}\right\}$

f) $\{g_n\} = \left\{\dfrac{2+\ln(n)}{n}\right\}$

g) $\{h_n\} = \left\{\dfrac{(-3)^n}{n!}\right\}$

h) $\{i_n\} = \left\{\dfrac{\ln(n)}{2^n}\right\}$

i) $\{k_n\} = \left\{\sqrt{\dfrac{2n+3}{3n-1}}\right\}$

j) $\{p_n\} = \{\sqrt[n]{2n-4}\}$

k) $\{q_n\} = \left\{\left(\dfrac{n}{1+n}\right)^n\right\}$

l) $\{r_n\} = \left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n}\right\}$

m) $\{s_n\} = \left\{\dfrac{n+5}{n}\right\}$

n) $\{t_n\} = \left\{\left(1+\dfrac{7}{n}\right)^{3n}\right\}$

o) $\{u_n\} = \left\{\dfrac{\ln(3n+1)}{n}\right\}$

p) $\{v_n\} = \left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}\right\}$

q) $\{z_n\} = \left\{\dfrac{3^n}{3^n+1}\right\}$

r) $\{\alpha_n\} = \left\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right\}$

s) $\{\beta_n\} = \left\{\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n^2+n}\right\}$

t) $\{\phi_n\} = \left\{\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}\right\}$

u) $\{\psi_n\} = \left\{\dfrac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}\right\}$

v) $\{\sigma_n\} = \left\{n^2(-1)^n\right\}$

w) $\{\theta_n\} = \left\{\dfrac{\ln(n^2)}{n}\right\}$

5. Determine se as sequências são monótonas.

a) $\{a_n\} = \left\{\dfrac{4n}{n+1}\right\}$

b) $\{b_n\} = \left\{\text{sen}\left(\dfrac{n\pi}{6}\right)\right\}$

c) $\{c_n\} = \left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$

6. Um programa governamental, que custa atualmente R\$2,5 bilhões ao ano, vai sofrer um corte em seu orçamento em relação à verba original de 20% ao ano.

a) Expresse a quantia orçada para esse programa após $n$ anos.

b) Calcule os orçamentos para os quatro primeiros anos.

c) Determine se a sequência de orçamentos com esse corte converge ou diverge. Se ela convergir, calcule o seu limite.

**Respostas da Lista de Exercícios**

1. a) $\sqrt{2}-1, \sqrt{3}-\sqrt{2}, \sqrt{4}-\sqrt{3}, \sqrt{5}-\sqrt{4}, \sqrt{6}-\sqrt{5}.$

b) $-1, 2, -3, 4, -5.$

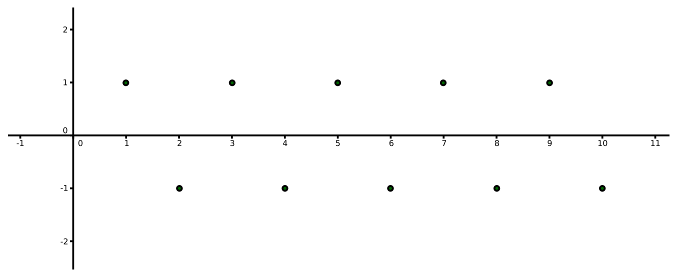
c) $\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{8}{9}, \dfrac{16}{17}, \dfrac{32}{33}.$

2. a) $(2n-1)^2.$

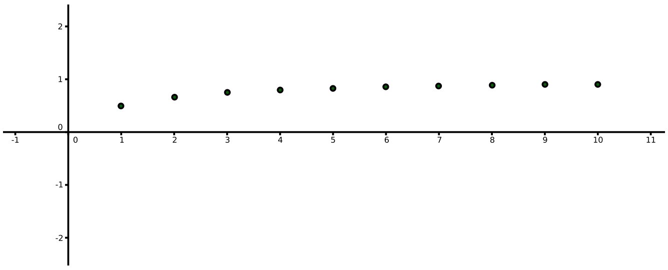
b) $\dfrac{1}{n!}.$

c) $(-1)^{n+1}.$

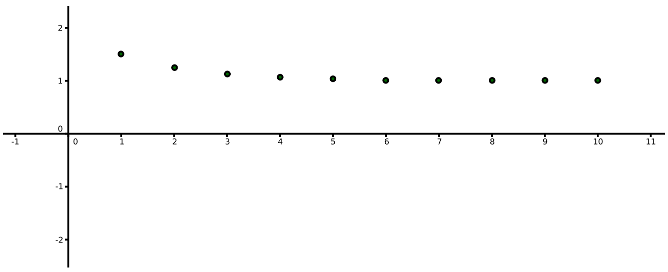
3. a) $(b_n) = (-1)^{n+1}$



b) $(c_n) = \dfrac{n}{n+1}$



c) $(d_n) = 1 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$



4. a) converge para $\dfrac{3}{4}$.

   b) diverge.

   c) converge para 0.

   d) diverge.

   e) converge para 0.

   f) converge para 0.

   g) converge para 0.

   h) converge para 0.

   i) converge para $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

   j) converge para 1.

   k) converge para $e^{-1}$.

   l) converge para $e^{-1}$.

   m) converge para 1.

   n) converge para $e^{21}$ .

o) converge para 0.

p) converge para $e$.

q) converge para 1.

r) converge para 0.

s) converge para $\frac{1}{2}$.

t) diverge.

u) converge para 1.

v) diverge.

w) converge para 0.

5. a) $a_n$ é monótona crescente.

   b) $b_n$ não é monótona.

   c) $c_n$ não é monótona.

6. a) $2,5 \cdot (0,8)^n$

   b) 2 bilhões; $1,6$ bilhões; $1,28$ bilhões; $1,024$ bilhões

   c) converge para 0.